Cours de Mathématiques en T$^{\text{ale}}$S

Vincent PANTALONI

Version du 6 avril 2008

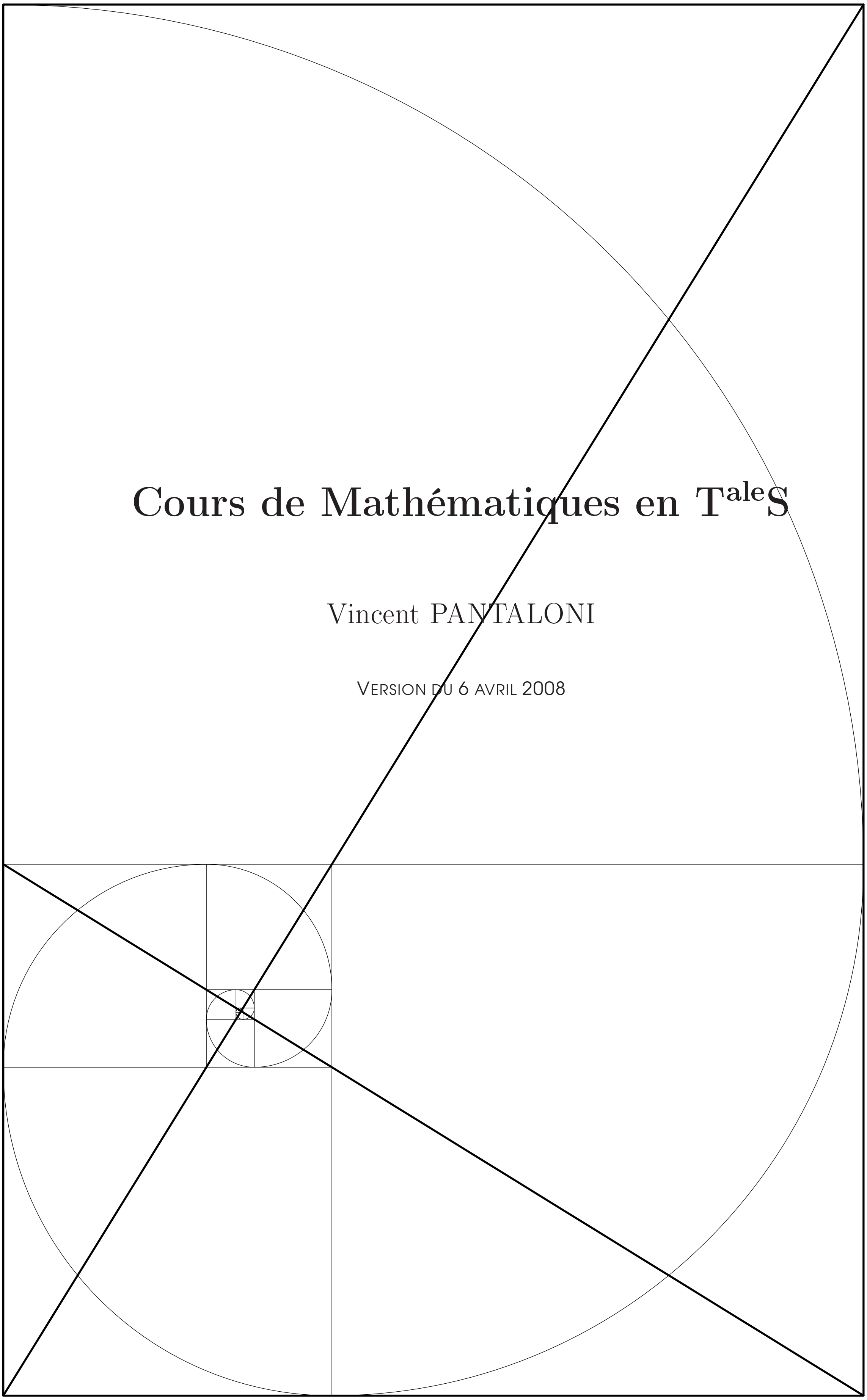


Table des matières

Chapitre I

Suites, raisonnement par récurrence.

1 Rappels

Suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$	Suite **arithmétique** de raison r	Suite **géométrique** de raison q
Définition	On passe de chaque terme au suivant en ajoutant le même réel r $$u_{n+1} = u_n + r$$	On passe de chaque terme au suivant en multipliant par le même réel q $$u_{n+1} = q \times u_n$$
Terme général	$$u_n = u_0 + nr$$ $$u_n = u_1 + (n-1)r$$	$$u_n = u_0 \times q^n$$ $$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$
Somme de termes	"Nombre de termes"× "Moyenne du premier et dernier terme" $$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$	"Premier terme"×$\dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ $$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$
Cas particuliers	$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$	$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

1.1 Exercices corrigés

Exercice n° 1

Calculer $S = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$

Solution: *C'est une somme géométrique du type* $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ *avec* $q = x^2$. *D'où :* $S = \dfrac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}$ *si* $x^2 \neq 1$. *Si* $x = 1$ *alors* $S = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$

Exercice n° 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On donne : $u_0 = 3$ et $u_{34} = 321$. Déterminer u_{100}.

Solution: *On a* $u_n = u_0 + nr$. *En remplaçant* n *par 34, on détermine* r. *Puis on calcule* u_{100}

Exercice n° 3

Calculer la somme : $S = 5 + 10 + 20 + 40 + \cdots + 5120$

Solution: *C'est la somme des termes de la suite* (u_n) *géométrique de raison 2 et de premier terme 5. Il reste à déterminer le nombre de termes de la somme.* $u_n = 5 \times 2^n \implies 5 \times 2^n = 5120 \implies 2^n = 1024 \implies n = 10$. *Donc* $S = u_0 + \cdots + u_{10}$ *qui comporte 11 termes. D'où :* $S = 5 \times \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = 5(2^{11} - 1) = 10235$

Exercice n° 4

Soit la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 3$ et $u_0 = 5$. On pose aussi $v_n = u_n - 1$. Montrer que (v_n) est géométrique, déterminer le terme général de (u_n).

Solution: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = -2u_n + 3 - 1 = -2(u_n - 1)$. *Donc* $v_{n+1} = -2v_n$, (v_n) *est géométrique de raison -2 et de premier terme* $v_0 = u_0 - 1 = 4$. *D'où* $v_n = 4 \times (-2)^n$. *Ainsi* $u_n = 4 \times (-2)^n + 1$

Propriété 1. *Limite de* q^n.

2 Comportement global d'une suite

2.1 Monotonie

Définition 1. Croissante, décroissante, constante, monotone

Remarque. Pareil avec strict.

2.2 Majorée, minorée, bornée

Définition 2. Maj, min, bornée.

Remarque. Pas unicité d'un maj.

Exemple: $u_n = 4 - \frac{1}{n}$

3 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence (on dit aussi par induction) est un principe de raisonnement (comme le raisonnement par l'absurde) qui sert à établir une propriété valable pour une infinité d'entiers naturels. Ce raisonnement comporte quatre étapes : L'initialisation, l'hypothèse de récurrence, l'hérédité et la conclusion.

3.1 Principe

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier n dont on veut prouver qu'elle est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$. (Parfois pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ ou $n \geqslant 3$ ...etc)

Initialisation. On vérifie que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hypothèse de récurrence. On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
Hérédité. On montre que sous l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(k+1)$ est aussi vraie.
Conclusion. Alors par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Toutes les phases du raisonnement sont nécéssaires, mais l'essentiel de la difficulté provient en général dans la phase de l'hérédité. À cet endroit il faut trouver un lien entre $\mathscr{P}(k)$ et $\mathscr{P}(k+1)$. Pour expliquer ce raisonnement on utilise parfois l'analogie suivante :

3.2 Analogie : gravir un escalier

On se trouve sur la première marche d'un escalier infini à gravir. Si on sait monter une marche, alors on peut accéder à n'importe quelle marche de l'escalier.

Initialisation. On est sur la première marche, donc on peut commencer.
Hypothèse de récurrence. On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on soit sur la k-ième marche.
Hérédité. On vérifie qu'on peut alors passer à la marche suivante, la $(k+1)$-ième.
Conclusion. Alors par récurrence, on peut accéder à la marche numéro n pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

3.3 Exemples

① Prouver la formule suivante donnant la somme des premiers entiers naturels :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1+2+3+\cdots+n$. La propriété à prouver par recurrence pour tout n de $\mathbb{N}^*$ est donc :

$$\mathscr{P}(n) : \qquad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Initialisation. $S_1 = 1$ et pour $n = 1$, $\frac{n(n+1)}{2}$ vaut $\frac{1\times 2}{2} = 1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hypothèse de récurrence. On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie *i.e.* $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Hérédité. Ici on veut prouver que $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or[1] : $S_{k+1} = S_k + (k+1)$.
Comme par hypothèse de récurrence $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ on en déduit que :

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)(1+\frac{k}{2}) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, on a prouvé que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

□

② Prouver par récurrence que pour n entier assez grand, $2^n \geqslant n^2$.

Démonstration. On commence par chercher à la main ou avec une calculette un rang à partir duquel la propriété semble vraie. On pense à $n = 4$. Soit $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $2^n \geqslant n^2$. On veut prouver qu'elle est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 4.
Initialisation. $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc $2^4 \geqslant 4^2$. Donc $\mathscr{P}(4)$ est vraie.
Hypothèse de récurrence. On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geqslant 4$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie *i.e.* $2^k \geqslant k^2$.
Hérédité. Ici on veut prouver que $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geqslant 2k^2$$

Il suffit donc de prouver que pour $k \geqslant 4$ on a $2k^2 \geqslant (k+1)^2$. Les deux membres sont positifs, cette égalité est équivalente à $\sqrt{2}k \geqslant k+1$ soit $k \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, ou encore $k \geqslant \sqrt{2}+1$. Or $\sqrt{2}+1 \leqslant 4$. Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, on a prouvé que pour tout entier n supérieur à 4, $2^n \geqslant n^2$.

□

4 Étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On se donne une fonction f définie, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in I$.

4.1 Intervalle stable

Définition 3. On dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$

Exemples:

1. $f(x) = x(1-x)$ sur $I = [0\,;1]$. I est stable par f, mais pas par $g = 5f$. Il suffit d'étudier f.
2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $u_0 = \frac{3}{2}$ Vérifier que la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne définit pas une suite.

La condition I stable par f permet de garantir que la suite est définie et que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle I. (récurrence immédiate)

[1] L'argument qui suit est la clef pour passer du rang k au rang suivant $k+1$.

4.2 Sens de variation

Propriété 2. **1.** *$\forall x \in I,\ f(x) - x \geqslant 0 \implies (u_n)$ croissante*

2. *$\iff \forall x \in I,\ f(x) - x \leqslant 0 \implies (u_n)$ décroissante*

Démonstration. Facile

Propriété 3. **1.** *f croissante $\implies (u_n)$ monotone. Le sens de var est donné par le signe de $u_1 - u_0$*

2. *f décroissante $\implies (u_{2n})$ et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires*

Démonstration. Supposons $u_1 > u_0$.

1. Par récurrence. $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ »

2. On pose $p_n = u_{2n}$ et $i_n = u_{2n+1}$. Alors :

$$p_{n+1} = f \circ f(p_n) \quad \textbf{et} \quad i_{n+1} = f \circ f(i_n)$$

Or f dec. implique $f \circ f$ croissante donc par le 1. p et i sont monotones. Supposons p croissante, alors $u_2 \geqslant u_0$ donc, en appliquant f qui est dec. on a $u_3 \leqslant u_1$ donc $i_1 \leqslant i_0$ donc i est dec.

4.3 Convergence

Définition 4. On appelle point fixe d'une fonction f un réel tel que $f(x) = x$

Théorème 1. *Si f est continue sur I et que (u_n) converge, alors la limite est nécessairement un point fixe de f*

Attention : L'existence d'un point fixe ne garantit pas la convergence de (u_n). Mais l'absence de point fixe suffit à justifier que (u_n) ne converge pas. En pratique : On justifie que (u_n) CV (croissante majorée par exemple) puis on détermine la limite en cherchant les points fixes de f. Si le point fixe est unique, c'est facile, sinon il faut raisonner avec le sens de variation de (u_n).

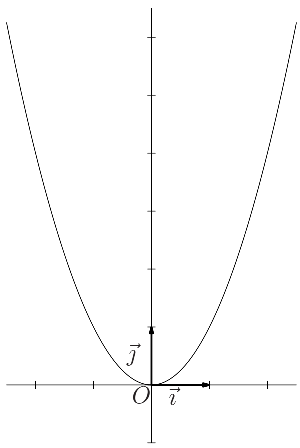
Exemple: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ et $u_0 \in [0\,;1]$

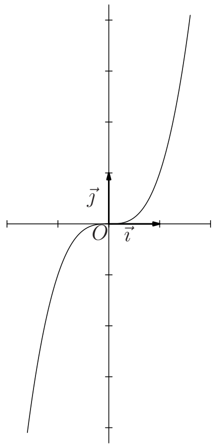
Chapitre II

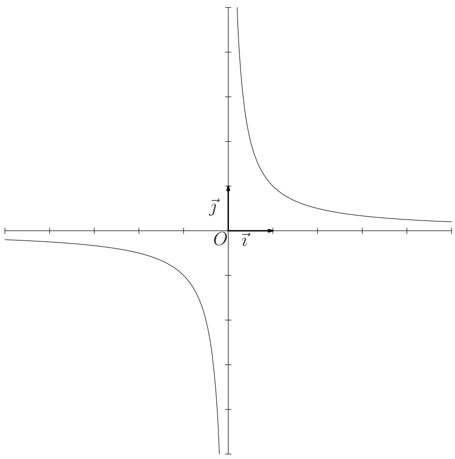
Limites et continuité

1 Rappels : Limites de référence

Voici les courbes des fonctions carré, cube et inverse. Leurs limites sont à connaître.







$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

2 Rappels sur la dérivation, notation différentielle

Définition 5. Soit $a \in I$ où I est un intervalle *ouvert*. Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable en a si le taux de variation de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. Si cette limite finie existe, on l'appelle le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

Remarque. En posant $x = a+h$, cette définition équivaut à : $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$

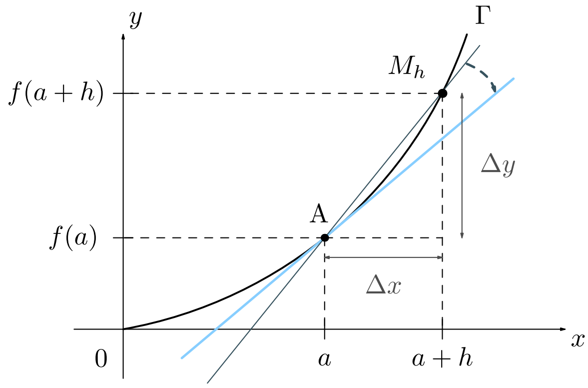
Interprétation graphique

Avec les notations du graphique, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quand h tend vers zéro le point M_h se rapproche du point A. Dire que f est dérivable en a signifie que la sécante (AM_h) admet une position limite. On appelle alors tangente à la courbe de f au point d'abscisse a, la droite T_a passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$. Ainsi l'équation réduite de T_a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



Autour du point A, la courbe de f et sa tangente T_a sont « très proches ». D'où la propriété :

Propriété 4 (Approximation affine)**.** *Si f est dérivable en a, et que h est proche de zéro :* $\boxed{f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)}$*. Ou encore, si x est proche de a, on a :* $\boxed{f(x) \simeq f(a) + (x-a)f'(a)}$

Démonstration. La définition 1 signifie que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0. D'où le résultat, qui consiste à négliger le terme $h\varepsilon(h)$. L'autre expression vient en posant $x = a + h$. □

Notation différentielle et sciences physiques

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, c'est à dire dérivable en tout réel a à l'intérieur de I. Alors en mathématiques, on note f' la fonction dérivée de f, mais pas en physique... Comme :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lorsque le Δx est infiniment petit, on le note $\mathrm{d}x$. De même le Δy devient $\mathrm{d}y$. En physique, au lieu de noter f' on notera alors $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. De plus, en physique, la variable est souvent le temps, donc noté t au lieu de x. On a donc : $f\ :\ t \longmapsto f(t)$. Si on dérive à nouveau f' on obtient la dérivée *seconde* de f notée f''. Si on redérive cette dernière on obtient f''' que l'on note aussi $f^{(3)}$, ainsi de suite, $f^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de f. Avec la notation différentielle utilisée en physique, celà donne :

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \qquad f'' = (f')' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$$

Remarquez comme l'opération « dériver par rapport à t » se comporte avec cette notation comme si on multipliait par l'opérateur : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Pour embrouiller un peut plus, la fonction en physique est souvent notée x. $x(t)$ représente typiquement l'abscisse d'un point mobile en fonction du temps t. La vitesse moyenne du point entre les temps t_1 et t_2 est alors :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La vitesse instantanée est alors la limite de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro, c'est donc : $x'(t)$, euh... pardon $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Mais les physiciens aussi feignants que les mathématiciens on trouvé une notation plus courte $\dot{x}$ qui désigne donc la vitesse v. De même vous savez (ou apprendrez) que l'accélération est la dérivée de la vitesse. On a alors :

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x' \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Comment note–t–on alors la vitesse instantanée au temps t_1 ? En maths ce serait $x'(t_1)$, en physique il y a trois notations possibles :

$$\dot{x}(t_1) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t_1) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_1}$$

3 Continuité

3.1 Définitions, exemples et contre exemples

La continuité est une notion de *régularité* des fonctions. En voici une définition heuristique :

Définition 6. On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I lorsque f est définie sur I et que sa courbe sur I peut se tracer « sans lever le crayon ».

Remarque. Cette définition est évidement uniquement intuitive, une *vraie* définition utilise les limites en un point (cf définition suivante).

Définition 7. On dit qu'une fonction f est continue en a ($a \in \mathbb{R}$) si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

① f est définie en a.

② $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a.

③ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

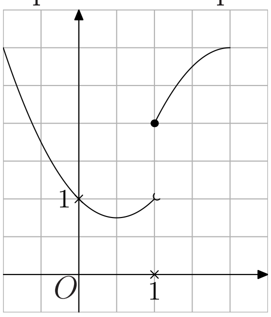
Si l'une quelconque de ces trois conditions n'est pas vérifiée, on dit que f n'est pas continue en a, ou qu'elle présente une discontinuité en a.

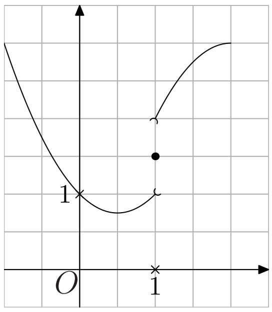
Remarque. Parfois le comportement d'une fonction f est différent à gauche et à droite d'un réel a. Il pourra alors être utile pour étudier l'existence d'une limite en a d'étudier les éventuelles limites à gauche et à droite de a, *i.e.* :

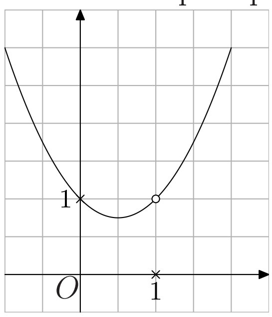
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

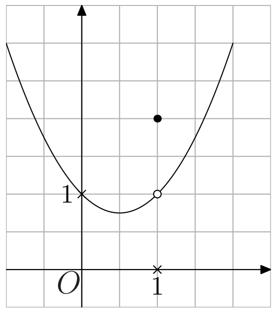
Si ces limites existent, alors, dire que f est continue en a revient à dire que ces deux limites sont égales à $f(a)$.

Les quatre fonctions f représentées ci–dessous présentent une discontinuité en 1. Dire lequel des trois points de la définition est mis en défaut et pourquoi.









Définition 8. On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I lorsque f est continue en tout réel a de I.

Convention Dans un tableau de variation, lorsqu'on note une flèche pour une fonction croissante (ou décroissante) sur un intervalle, cette flèche signifie aussi la continuité de la fonction sur l'intervalle. On mettrait une double barre en un point de discontinuité.

Propriété 5. *Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*

⚠ La réciproque est fausse. Contre–exemple : La fonction valeur absolue. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0. La dérivabilité est donc une notion de régularité plus forte que la continuité.

Démonstration. (Du contre–exemple) $|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geqslant 0, \\ -x & \text{if } x \leqslant 0. \end{cases} \Longrightarrow \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases}$
Le taux de variation de la valeur absolue en 0 a une limite à gauche qui vaut -1, et une limite à droite qui vaut 1. Donc la limite en 0 n'existe pas.

□

Démonstration. On écrit l'approximation affine avec une fonction ε telle que : $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \varepsilon(x)$$

□

Propriété 6. *(Admise) Les fonctions usuelles : polynômes, racine carrée, valeur absolue, fractions rationnelles,* sin, cos,*(bientôt* exp *et* ln*) et leurs composées sont continues sur les intervalles où elles sont définies.*

Cette propriété permet de justifier la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle.

Exemple: Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. f est définie dès que $x^2 - 1$ est positif donc sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[1\,;+\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, f est la composée de la fonction racine (continue sur $\mathbb{R}^+$) et d'un polynôme (donc continu sur $\mathbb{R}$). Ainsi f est continue sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[1\,;+\infty[$. La phrase « *f est continue sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[1\,;+\infty[$ comme composée de fonctions continues* » est plus vague mais suffira.

Cependant il existe des fonctions qui ne sont pas continues :

3.2 La fonction partie entière

Définition 9. On appelle partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x. *i.e.* $E(x)$ est l'entier n tel que : $n \leqslant x < n + 1$

Exemples: $E(2,36) = 2$; $E(2) = 2$; $E(\pi) = 3$; $E(-2,36) = -3$

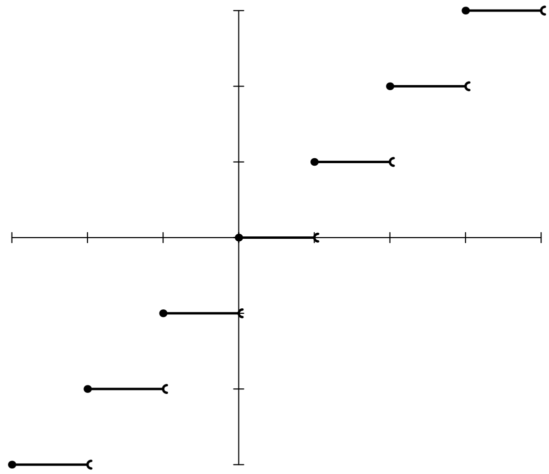
Propriété 7. *Pour tout entier n, sur l'intervalle $[n\,;n+1[$, la fonction partie entière est constante égale à n. Elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une discontinuité pour chaque entier.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition de E, pour $x \in [n\,;n+1[$ on a $E(x) = n$. Prouvons la discontinuité de E en $n+1$. Par passage à la limite (en restant dans l'intervalle $[n\,;n+1[$) :

$$\lim_{\substack{x \to n+1 \\ x < n+1}} E(x) = n \neq E(n+1) = n+1$$

□

On en déduit la courbe de la fonction partie entière, on dit que c'est une fonction en escalier.



3.3 Prolongement par continuité

Exemple: La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non définie en 3, mais :

$$x \neq 3 \implies f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$$

Ainsi la courbe de f est la droite d'équation : $y = x + 3$ à laquelle il manque le point d'abscisse 3. On pose alors la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{f}(x) = x + 3. \quad \text{donc} \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 3, \\ 6 & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors continue sur $\mathbb{R}$, on dit que c'est un prolongement de f par continuité en 3.

Exemple: La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ n'est pas définie en zéro, mais on a vu que sa limite en zéro existe et vaut 1. On peut « prolonger la fonction f par continuité » en 0, en posant la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $\tilde{f}(0) = 1$

4 Théorème des valeurs intermédiaires

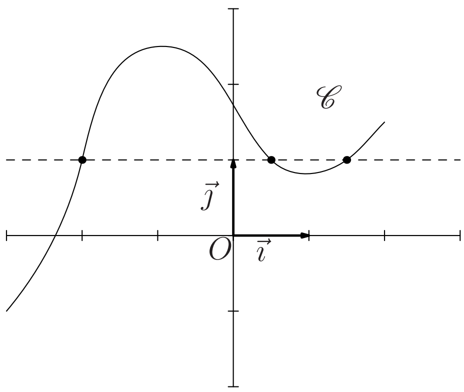
Théorème 2. Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit λ un réel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a\,;b[$.*

Remarque. Si la fonction n'est pas continue, cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée. La fontion partie entière fournit un contre exemple : $E(0) = 0$ et $E(1) = 1$ mais l'équation $E(x) = 0,5$ n'a pas de solution dans $]0\,;1[$ (ni ailleurs).

Propriété 8 (Cas particulier important : $\lambda = 0$)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a\,;b[$*

C'est un cas particulier, mais en fait cette propriété est équivalente au théorème des valeurs intermédiaires, et on la démontre par dichotomie en utilisant des suites adjacentes qui convergent vers une racine de f. (cf TD)
Ces propriétés nous garantissent l'existence de solutions pour des équations mais ne nous fournissent pas les solutions, ni leur unicité, juste des intervalles où elles se trouvent. On peut donc avec la calculatrice trouver des encadrements à la précision souhaitée des solutions cherchées.

Exemple: Sur le graphique ci-dessous, on a une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction continue f sur l'intervalle $[-3\,;2]$. On a $f(-3) = -1$ et $f(2)$ =1,5. Comme la valeur $\lambda = 1$ est comprise entre -1 et 1,5 le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution (ici il y en a trois) sur l'intervalle $]-3\,;2[$. Autrement dit, la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $y = 1$ sur cet intervalle.



En pratique, la simple lecture d'un tableau de variation permet de répondre aux questions du type : “Combien l'équation $f(x) = \lambda$ admet elle de solutions ? Donner des encadrements de ces solutions.” Rappel : on admet qu'une flèche dans un tableau de variation traduit aussi la continuité de la fonction sur l'intervalle en question. La version suivante du théorème des valeurs intermédiares permet de garantir l'unicité de la solution :

Théorème 3 (Utile en pratique[1])**.** *Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit λ un réel tel que : $f(a) < \lambda < f(b)$. Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une* **unique** *solution dans l'intervalle ouvert $]a\,;b[$.*

Démonstration. Laissé en exercice. □

[1]On dit dans ce cas que f réalise une *bijection* croissante de $[a\,;b]$ dans $[f(a)\,;f(b)]$. C'est pourquoi cette propriété est parfois appellée « théorème de la bijection ».

Remarque. Il existe évidemment un énoncé similaire pour une fonction strictement décroissante...

Exemple: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x + 7$. Justifier que $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;1]$. Réponse d'un bon élève :
f est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme). Or $f'(x) = 5x^4 + 1$ et x^4 est positif donc la dérivée de f est strictement positive, donc f est strictement croissante sur $[-2\,;1]$. De plus $f(-2) = -33 < 0$ et $f(1) = 9 > 0$. Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;1]$. D'après le tableau de variation de f et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ on en déduit aussi que $f(x) = 0$ admet en fait une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Il est par contre imposible de résoudre par le calcul cette équation, mais pouvez vous à l'aide de la calculette déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} du réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$. Trois méthodes :

Méthodes de résolution approchée de $f(x) = \lambda$

- Graphiquement, en zoomant de plus en plus sur le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (pour $\lambda = 0$) ou avec la droite d'équation $y = \lambda$.

- Mieux encore, certaines calculettes disposent d'un outil de résolution graphique (G-solv) il faut choisir *isect* pour l'intersection de deux courbes que l'on doit sélectionner (la courbe de f et la droite d'équation $y = \lambda$ si on veut résoudre $f(x) = \lambda$) ou *Root* si on cherche une racine.

- En utilisant le tableau de valeurs que l'on doit paramétrer correctement. *pitch* (Casio) ou ΔTbl (TI) donne le pas de la variation de X, donc la précision voulue. Mais il faut d'abord connaitre un vague encadrement de la solution (par une méthode graphique par exemple)

- À l'aide d'un programme adapté, comme celui que nous allons établir qui fonctionne par dichotomie. On peut utiliser la méthode de Newton-Raphson ou méthode de la tangente[2] (plus rapide)

5 Preuve du T.V.I. par dichotomie

cf chapitre Suites adjacentes. 8

[2] $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Cette suite converge vers une racine si elle existe, prendre x_0 assez près de la racine.

6 pplications

6.1 Racine d'un polynôme de degré impair

6.2 Fonctions réciproques

7 Dérivabilité

7.1 Définition

Définition 10. Soit $a \in I$ où I est un intervalle *ouvert*. Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable en a si :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{admet une limite finie quand } h \text{ tend vers } 0$$

Si cette limite finie existe, on l'appelle le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$

Remarque : Cette def signifie que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h)$ où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 en 0

Propriété 9. Approximation affine *On en déduit que si f est dérivable en a, et que h est proche de zéro : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$*

Exemples: Pour x proche de 0 : $\mathrm{e}^x \simeq x+1$ $\sin x \simeq x$, $(1+x)^n \simeq 1+nx$

Cette propriété doit son nom au fait que faire cette approximation revient à confondre au point d'abscisse $(a+h)$ la courbe avec sa tangente en a :

Démonstration. Eq de la tangente. Ordonnée pour $x = a+h$. □

Définition 11. Soit I un intervalle *ouvert*. Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout en a de I.

Pour prouver qu'une fonction est dérivable en un point, il faut donc calculer une limite. En particulier lorsque ce point est aux bornes d'un intervalle fermé. Pour prouver que f est dérivable sur un intervalle ouvert, en général on utilise que :

Propriété 10. *La composée de fonctions dérivables est dérivable sur tout intervalle ouvert où la fonction est définie.*

Démonstration. Admis □

7.2 Propriétés

Propriété 11. *Une fonction dérivable en a est continue en a*

Démonstration. **À connaître !** f dérivable en a signifie que :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 en 0. D'où pour h non nul :

$$f(a+h) = hf'(a) + h\varepsilon(h) + f(a)$$

D'où la limite voule, et f est continue en a. □

7.3 Exemples, contre exemples

Attention ! La réciproque de la propriété précédente est fausse : Valeur absolue et racine. On a même construit des fonctions continues sur $[0\,;1]$ nulle part dérivable.

Soit $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$ pour $x \in]0\,;+\infty[$ et $f(0) = 0$ Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Est-elle dérivable en 0 ? Même question avec $g(x) = xf(x)$. Retour aux exos de la feuille avec $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

Chapitre III

Exponentielle

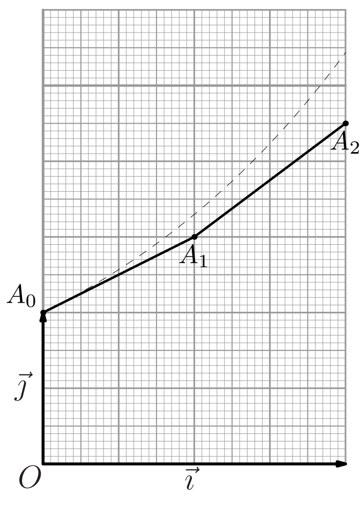
1 Méthode d'EULER

1.1 Aspect graphique

On utilise la méthode d'Euler pour approximer la courbe d'une fonction f (si elle existe) telle que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette méthode utilise l'approximation affine suivante : $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$ valable pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, a dans I et h petit (et $a+h$ dans I). Graphiquement cela revient à confondre la courbe de la fonction avec sa tangente sur l'intervalle $[a\,;a+h]$. J'ai fait les graphiques sur l'intervalle $[0\,;1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ pour le pas de la méthode. On fera ensuite tendre le pas vers zéro en faisant tendre n vers l'infini. Comme $f(0) = 1$ on place le premier point A_0 de coordonnées $A_0(0;1)$. Je fais l'explication pour $n = 2$ donc $h = \frac{1}{2}$ (cf. premier graphique). Comme $f' = f$ on a donc $f'(0) = f(0) = 1$

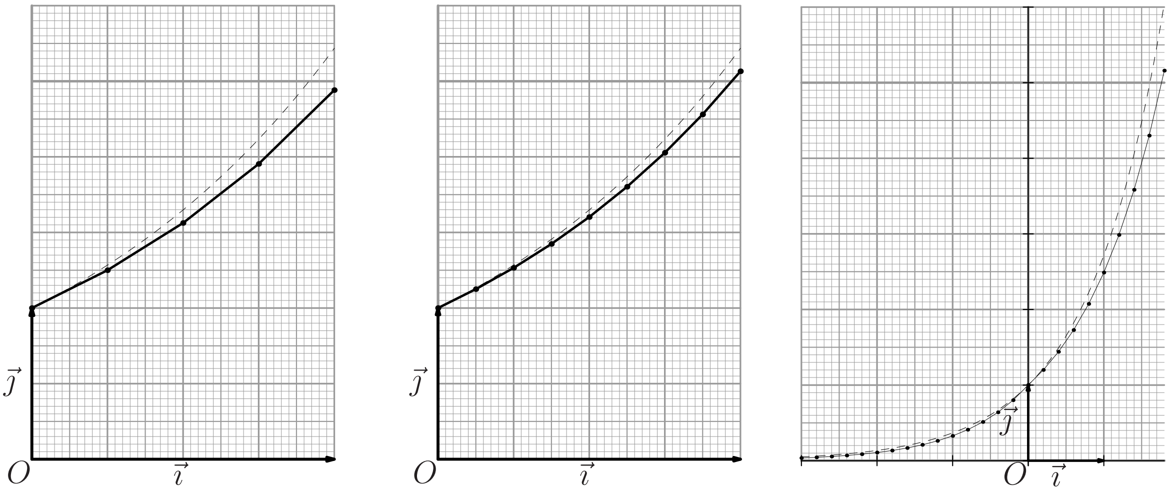


1. On trace donc le segment partant de A_0 joignant A_1 tel que l'abscisse de A_1 soit $0 + h = \frac{1}{2}$ et tel que (A_0A_1) ait pour coefficient directeur 1. Les coordonnées de A_1 sont donc $A_1(0,5; 1,5)$. Par le calcul :

$$f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0) = (1+h)f(0) = 1,5$$

2. On a donc $f(0,5) \simeq 1,5$. Or $f' = f$ donc 1,5 est aussi une valeur approchée de $f'(0,5)$. On l'utilise pour obtenir le point suivant A_2 d'abscisse $0,5 + 0,5 = 1$. Et (A_1A_2) a pour coefficient directeur $1,5$. On trouve donc l'ordonnée de A_2 : $1,5 + 0,5 \times 1,5 = 2,25$
3. Ainsi 2,25 est une valeur approchée de $f(1)$. On pourrait continuer ainsi indéfiniment. Le prochain segment a un coefficient directeur de $2,25$.

Les deux graphiques suivants s'obtiennent de la même manière mais avec des valeurs de n plus grandes ($n = 4$ et $n = 8$ et donc des pas de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$). Le dernier est obtenu avec un pas de $\frac{1}{5}$ et un pas de $-\frac{1}{5}$ afin d'obtenir la courbe pour des valeurs négatives de x. De plus celui-ci est dans un repère orthonormal. Tous les graphiques de cette page comportent aussi en pointillé la « courbe limite » recherchée afin que l'on voit mieux la convergence de la méthode.



1.2 Aspect calculatoire

On va d'abord approximer f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ pour le pas de la méthode. On fera ensuite tendre le pas vers zéro en faisant tendre n vers l'infini.
- On définit une suite d'abscisses. On part de $x_0 = 0$ et $x_{k+1} = x_k + h$ pour tout entier naturel k. Cette suite est arithmétique de raison $h = \frac{1}{n}$ donc on a le terme général :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k = \frac{k}{n}$$
- On définit maintenant la suite des ordonnées des points que l'on place. On part de $y_0 = 1$ puisque $f(0) = 1$. On applique alors l'approximation affine, $f(x_{k+1}) = f(x_k + h)$ d'où : $f(x_{k+1}) = f(x_k + h) \simeq f(x_k) + hf'(x_k)$. Or f vérifie aussi $f = f'$ sur $\mathbb{R}$ donc : $f(x_{k+1}) \simeq f(x_k)(1 + h)$. On veut que y_k soit proche de $f(x_k)$ et donc que y_{k+1} soit proche de $f(x_{k+1})$. On définit donc la suite (y_k) par la relation de récurrence :
$$y_{k+1} = y_k(1 + h)$$
Cette suite est géométrique de raison $(1 + h)$ et comme $y_0 = 0$ et $h = \frac{1}{n}$ on a donc :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad y_k = (1 + \frac{1}{n})^k$$

2 Equation différentielle y'=y

Théorème 4. *Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

Existence admise, on va prouver l'unicité.

Lemme 1. *Si il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' =$ et $f(0) = 1$ alors elle vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x)f(x) = 1$ et par conséquent f ne s'annule pas.*

Démonstration. On pose la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = f(-x)f(x)$. On dérive, $\varphi' = 0$ et $\varphi(0) = 1$ □

On prouve maintenant l'unicité :

Démonstration. Supposons qu'il existe deux fonctions f et g qui définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$. D'après le lemme, ces fonctions ne s'annulent pas, et donc on peut considérer la fonction ψ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $\psi = \frac{f}{g}$. On dérive, $\psi' = 0$ et $\psi(0) = 1$. Donc ψ est constante, égale à 1, ainsi $f = g$. □

Cette unique fonction s'appelle la fonction exponentielle et on la note exp : $x \mapsto \exp(x)$ Pour calculer des valeurs approchées de $\exp(x)$ on peut utiliser la méthode d'Euler. On déduit du lemme1 et de la continuité de exp sur $\mathbb{R}$ la propriété qui sera très utile plus tard pour des études de signe :

Propriété 12. *La fonction* exp *est* **strictement positive** *sur* $\mathbb{R}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0}$$

3 Méthode d'Euler-valeur approchée de $\exp(x)$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ pour le pas de la méthode. On fera ensuite tendre le pas vers zéro en faisant tendre n vers l'infini.
- On définit une suite d'abscisses. On part de $x_0 = 0$ et $x_{k+1} = x_k + h$ pour tout entier naturel k. Cette suite est arithmétique de raison $h = \frac{1}{n}$ donc on a le terme général :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k = \frac{k}{n}$$
- On définit maintenant la suite des ordonnées des points que l'on place. On part de $y_0 = 1$ puisque $f(0) = 1$. On applique alors l'approximation affine, $f(x_{k+1}) = f(x_k + h)$ d'où : $f(x_{k+1}) = f(x_k + h) \simeq f(x_k) + hf'(x_k)$. Or f vérifie aussi $f = f'$ sur $\mathbb{R}$ donc : $f(x_{k+1}) \simeq f(x_k)(1 + h)$. On veut que y_k soit proche de $f(x_k)$ et donc que y_{k+1} soit proche de $f(x_{k+1})$. On définit donc la suite (y_k) par la relation de récurrence :
$$y_{k+1} = y_k(1 + h)$$
Cette suite est géométrique de raison $(1 + h)$ et comme $y_0 = 0$ et $h = \frac{1}{n}$ on a donc :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad y_k = (1 + \frac{1}{n})^k$$

Application : Si on veut une valeur approchée de $\exp(1)$ il faut remarquer que $x_k = \frac{k}{n} = 1 \iff k = n$. On a donc : $\exp(1) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ (On admet que cette limite existe *i.e.* que la méthode d'Euler converge) Pour des grandes valeurs de n on obtient les valeurs approchées suivantes :

$$(1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25 \quad (1 + \frac{1}{10})^{10} \simeq 2,59 \quad (1 + 10^{-3})^{1000} \simeq 2,717 \quad (1 + 10^{-6})^{10^6} \simeq 2,71828$$

Cette valeur limite est notée e

Propriété 13. *La valeur de* $\exp(1)$ *est notée* e *, c'est un réel transcendant (comme* π*).*

$$\exp(1) = \mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

4 Propriétés algébriques

Propriété 14. *Pour tous réels* a *et* b *et tout entier relatif* n*, on a les formules :*

$$\boxed{\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}} \tag{III.1}$$

$$\boxed{\exp(a+b) = \exp(a)\times\exp(b)} \tag{III.2}$$

$$\boxed{\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}} \tag{III.3}$$

$$\boxed{\exp(a\times n) = (\exp(a))^n} \tag{III.4}$$

La relation (III.2) s'appelle la relation fonctionnelle de l'exponentielle.

Démonstration. (III.1) découle du Lemme 1. (III.3) découle de (III.2) et (III.1). (III.4) se prouve à partir de (III.2) par récurrence sur n. L'essentiel est de prouver (III.2) :
Soit $b\in\mathbb{R}$. On considère la fonction χ de x où b est un paramètre définie par : $\chi(x) = \dfrac{\exp(x+b)}{\exp(x)}$ On dérive, $\chi' = 0$ et $\chi(0) = \exp(b)$. Donc pour tout réel x, $\exp(x+b) = \exp(x)\exp(b)$. Ceci pour tout réel b. D'où (III.2)
Preuve de (III.4) : Soit a un réel. Soit $\mathscr{P}(n)$: « $\exp(a\times n) = (\exp(a))^n$ » Prouvons par récurrence sur n que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ini : Comme $\exp(a)\neq 0$, $\exp(a)^0 = 1 = \exp(0)$ ok... □

5 Notation exponentielle

La formule (III.4) donne pour $a = 1$: $\exp(n) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$ Par analogie, pour tout réel x on note $\exp(x) = \mathrm{e}^x$. On a donc les règles de calcul usuelles avec les puissances pour tous réels a et b et tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$\boxed{\mathrm{e}^a\times\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}} \qquad \boxed{(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{a\times n}}$$

Cas particuliers importants : $\boxed{\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}}$ $\boxed{\mathrm{e}^0 = 1}$ $\boxed{\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$

cf touche de la calculette. Attention selon modèle on tape ou non le chapeau. Attention aux parenthèses. Exercices à base de simplification d'expressions.

Exercice n° 5

Écrire plus simplement les expressions suivantes en utilisant les règles sur l'exponentielle :

$$A = \mathrm{e}^2\times\mathrm{e}^3 \qquad B = \frac{(\mathrm{e}^2)^4}{\mathrm{e}^3} \qquad C = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^2 \qquad D = \frac{(\mathrm{e}^x)^2\times\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}} \qquad E = \frac{\mathrm{e}^{3x-1}}{\mathrm{e}^{2-x}}$$

Exercice n° 6

Prouver les égalités suivantes :

$$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

6 Étude de la fonction exponentielle

6.1 Dérivée et variation

Propriété 15. *La fonction exponentielle est sa propre dérivée :* $\boxed{(e^x)'=e^x}$

D'après la propriété 12, on en déduit :

Propriété 16. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$

Propriété 17 (Dérivée d'une fonction composée avec e^x)**.** *Si u désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $\exp(u)$ est dérivable et :*

$$\boxed{[e^{u(x)}]'=u'(x)\times e^{u(x)}}$$

6.2 Équations et inéquations

Propriété 18. $\forall a,b\in\mathbb{R},\quad \boxed{e^a\leqslant e^b\iff a\leqslant b}$

Démonstration. On prouve chaque sens séparément. Soit a et b deux réels.

($\Longleftarrow$) $a\leqslant b \implies e^a\leqslant e^b$ car exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

($\Longrightarrow$) Si $e^a\leqslant e^b$. Supposons que a soit strictement supérieur à b, alors comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ on aurait e^a strictement supérieur à e^b. □

Propriété 19. $\forall a,b\in\mathbb{R},\quad \boxed{e^a=e^b\iff a=b}$

Démonstration. On prouve chaque sens séparément. Soit a et b deux réels.

($\Longleftarrow$) $a=b \implies e^a=e^b$ car exp est une application.

($\Longrightarrow$) Si on a $e^a=e^b$ on procède par double inéquation :

- $e^a=e^b \implies e^a\leqslant e^b \implies a\leqslant b$
- $e^a=e^b \implies e^a\leqslant e^b \implies a\geqslant b$

On a donc $a=b$. □

⚠ Attention, l'équation : $e^x=a$ n'a pas de solution si $a\leqslant 0$ mais grace au TVI, on peut prouver que :

Exercice n° 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

(a) $e^{5x-1}=1$ (b) $e^{2x-1}=e^{3x-2}$ (c) $e^{5x-1}=-2$ (d) $e\,e^{x^2}=(e^{2x+1})^2$

Exercice n° 8

p31 n° 17, 18, 24, 25, 26, 27.

Exercice n° 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x - \frac{1}{(\mathrm{e}^x)^2} \leqslant 0$

Exercice n° 10

On définit deux fonctions, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \textbf{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = -1$.

2. Démontrer que pour tout réel x : $\mathrm{ch}(2x) = 2\mathrm{ch}^2(x) - 1$ **et** $\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(x)$

3. Prouver que : $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$ et $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.

4. On définit tangente hyperbolique par th=sh/ch. Prouver que $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ et $\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2$

Propriété 20 (Logarithme néperien)**.** *Pour tout réel strictement positif a, l'équation en x :*

$$\mathrm{e}^x = a \tag{III.5}$$

a une unique solution que l'on note : $\ln(a)$ *appelée logarithme néperien de a.*

On trouve cette fonction sur la calculette sur la même touche que exp. Ne pas confondre avec log.

Exemple: $\mathrm{e}^x = 2 \implies x = \ln(2)$.

Exercice n° 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^x - 4 = 0$

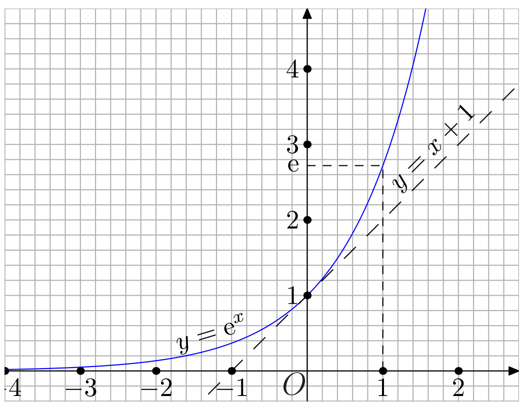
Solution :$\Delta = 25$, $X_1 = 1$, $X_2 = -4$

Exercice n° 12

Résoudre les équations suivantes qui se ramènent à des équations du second degré.
On pourra poser $X = \mathrm{e}^x$

$$2\,\mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^x + 1 = 0 \tag{III.6}$$
$$\mathrm{e}^{2x} - 2\,\mathrm{e}^x = 0 \tag{III.7}$$
$$\mathrm{e}^x + 12\,\mathrm{e}^{-x} + 7 = 0 \tag{III.8}$$

6.3 Courbe, approximation affine



Sur la courbe tracée ci-dessus, on a aussi tracé la droite d'équation $y = x + 1$ qui est la tangente en zéro la courbe de exp.

Propriété 21. *Pour x proche de zéro, e^x est proche de $x+1$. Plus précisément, il existe une fonction ε qui tend vers zéro en zéro ($\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$) telle que pour tout réel x :*

$$\mathrm{e}^x = x + 1 + x\varepsilon(x)$$

Démonstration. On applique la formule de l'approximation affine vue en première pour une fonction f dérivable au voisinage de a : $f(x+a) = f(a) + xf'(a) + x\varepsilon(x)$. Comme $\exp(0) = 1$ on a le résultat souhaité pour $a = 0$. □

Propriété 22. *$\mathscr{C}_{\exp}$ est au dessus de sa tangente en zéro.* i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$$

Démonstration. On pose φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$ et on veut proiuver que cette fonction est positive sur $\mathbb{R}$ pour celà, on l'étudie. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or :

$$\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \Longleftrightarrow x \geqslant 0$$

D'où les variations de φ qui admet ainsi un minimum en zéro qui vaut : $\varphi(0) = 0$. Donc φ est positive sur $\mathbb{R}$. □

Ceci permet d'établir la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$

6.4 Limites — Croissance comparée

On a démontré en T.D. par comparaison les limites suivantes (où $n \in \mathbb{N}$)

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty}$$

La première limite indique que l'axe de abscisses est asymptote à $\mathscr{C}_{\exp}$ en $-\infty$. Les deux dernières sont *a priori* des formes indéterminées que l'on retient par *"L'exponentielle l'emporte sur les puissances de x."*

Chapitre IV

Nombres Complexes, énéralités

Introduction

0.5 Résolution historique

Au XVI[e] siècle les algébristes italiens apprennent à résoudre les équations du troisième degré, en les ramenant à des équations du deuxième degré dont la résolution est connue depuis le IX[e] siècle grâce auxs mathématiciens arabes. On attribue à CARDAN (Girolamo Cardano : Pavie 1501-Rome 1576) la formule (IV.2) donnant une solution à l'équation du troisième degré d'inconnue x :

$$x^3 = px + q \tag{IV.1}$$

En fait, TARTAGLIA (Niccolò Tartaglia : Brescia 1500 - Venise 1557) autodidacte aurait découvert la formule en 1539 et l'aurait exposée au professeur respecté CARDAN qui l'a publié dans son *Ars magna* en 1545 comme étant sa propre découverte, le reste de l'histoire est romanesque.

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{IV.2}$$

Définition 12. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\sqrt[3]{a}$ appelé *racine cubique de a* l'unique réel x vérifiant $x^3 = a$.

La racine cubique, contrairement à la racine carrée est définie pour tout réel car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et varie de $-\infty$ à $+\infty$. Par exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

1. Prouver que toute équation de degré trois donc de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec a, b, c, d trois réels et $a \neq 0$ peut se mettre sous la forme $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$
2. Prouver que toute équation de degré trois de la forme $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut se mettre sous la forme de l'équation (IV.1) à l'aide du changement de variable : $x = X - \frac{b}{3}$.
3. Voyons sur un exemple comment ils trouvèrent la formule improbable (IV.2). On considère l'équation :

$$x^3 = 6x + 20 \tag{IV.3}$$

   a. On pose $x = u + v$. Que devient l'équation (IV.3) ?

b. Quelle valeur suffit-il d'imposer au produit uv pour que (IV.3) s'écrive $u^3+v^3 = 20$?

c. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. Former et résoudre une équation de degré deux ayant pour solutions U et V.

d. En déduire que :

$$\sqrt[3]{10+2\sqrt{23}}+\sqrt[3]{10-2\sqrt{23}}$$

est une solution de (IV.3).

e. Optionnel : Etudier $x \mapsto x^3-6x-20$ sur $\mathbb{R}$ pour voir qu'il n'y a qu'une solution à l'équation (IV.3).

La méthode de Tartaglia-Cardan conduit cependant, dans certains cas, à un paradoxe que Bombelli(1526-1572) va essayer de surmonter. Il publie en 1572 dans son *l'Algebra opera* l'exemple suivant :

0.6 Des nombres impossibles

On considère l'équation :

$$x^3 = 15x + 4 \tag{IV.4}$$

1. Combien vaut alors la quantité : $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ qui apparaît dans la formule (IV.2) ?
2. Prouver cependant que 4 est solution de (IV.4)
   L'idée et l'audace de Bombelli est de faire comme si -121 était le carré d'un nombre imaginaire qui s'écrirait $11\sqrt{-1}$. Il appella $\sqrt{-1}$ *piu di meno* qui sera noté **i** plus tard par Euler(1734-1810) en 1777. Grâce à ce stratagème,Bombelli retrouve la solution réelle 4 :
3. Développer $(2+\mathrm{i})^3$ et $(2-\mathrm{i})^3$ en tenant compte de $\mathrm{i}^2 = -1$.
4. En déduire que $(2+\mathrm{i})+(2-\mathrm{i})$ est solution de (IV.4).
   Ce nombre « $\sqrt{-1}$ » qualifié d'impossible va susciter beaucoup de méfiance et de polémique pendant deux siècles jusqu'à Argand en 1806 qui proposera une représentation géométrique de ces nombres imaginaires (de la forme $a+ib$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) et Gauss(1777-1855) qui les nommera **Nombres complexes**.

1 Introduction-Premières définitions

1.1 Historique

Cf. activité. Bombelli en voulant résoudre $x^3 = 15x+4$ a utilisé des racines de nombres reels negatifs, comme $\sqrt{-1}$. On a peu a peu construit un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ qui contient un nombre imaginaire note i solution de l'equation $x^2 = 1$. La notation $\sqrt{}$ reste réservée aux réels positifs. On n'écrira plus $\sqrt{-1}$.

1.2 Construction de $\mathbb{C}$

Définition 13. On appelle ens. des nombres complexes note $\mathbb{C}$ l'ens des $a+ib$ où a et b sont des reels et i une solution de $x^2 = -1$

Dans la suite, a et b désigneront deux réels, et z un nombre complexe égal à $a+ib$.

Définition 14. Si $b = 0$ on dit que $z = a$ est réel, si $a = 0$, on dit que $z = \mathrm{i}b$ est un imaginaire pur.

Remarque : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. On a donc les inclusions d'ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Les règles de calcul de $\mathbb{R}$ se prolongent à $\mathbb{C}$ en tenant compte de $\mathrm{i}^2 = -1$ On definit l'addition et la multiplication de deux complexes :

- Addition : La somme de deux complexes est un complexe. $z + z' = ...$ (L'opération $+$ est associative et commutative, l'élement neutre est le réel 0. Tout complexe admet un opposé. On dit que $\mathbb{C}$ muni de l'addition est un groupe.
- Multiplcation. . .idem.

Propriété 23. *$\mathbb{C}$ est stable par addition et multiplication, la multiplication est distributive sur l'addition, tout complexe non nul admet un inverse qui est un nombre complexe. On dit que $\mathbb{C}$ est un corps.*

Propriété 24. *Tout complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $a + \mathrm{i}b = \Re(z) + \mathrm{i}\Im(z)$ appelée forme algebrique du complexe z*

Démonstration.

- $a + \mathrm{i}b = 0 \iff (a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0)$. Car sinon $\mathrm{i} \in \mathbb{R}$

  $z = z' \iff z - z' = 0 \iff ...$

□

Définition 15. Lorsqu'un nombre complexe z est mis sous forme algébrique $a + \mathrm{i}b$, alors a s'appelle la partie réelle de z, notée $\Re(z)$ et b sa partie imaginaire, notée : $\Im(z)$.

La partie imaginaire comme la partie réelle est un nombre réel !

Exemple: $\Re(1 + 2i) = 1$ et $\Im(1 + 2\mathrm{i}) = 2$ et pas $2\mathrm{i}$

Consequence : On peut identifier partie réelle et imaginaire de deux complexes qui sont égaux

Propriété 25. $z = z' \iff (\Re(z) = \Re(z') \quad \textit{et} \quad \Im(z) = \Im(z'))$

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 16. On appelle conjugué de z, noté $\bar{z}$

Propriété 26. *Conjugué de : $z + z'$, zz', z^n, $\dfrac{z}{z'}$*

Propriété 27. $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ *et* $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff z + \bar{z} = 0$

- *Démonstration.* $z = \bar{z} \iff \cdots \iff 2\mathrm{i}b = 0 \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$ En particulier, $\bar{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.4 Module d'un nombre complexe

Propriété 28. *$z\bar{z} \in \mathbb{R}^+$ Et on a la formule $z\bar{z} = a^2 + b^2$*

Définition 17. On appelle module d'un nombre complexe, noté $|z|$ le réel positif : $\sqrt{z\bar{z}}$

Remarque, cette notation est la même que la valeur absolue d'un reel et c'est bien justifie, les deux coincident sur $\mathbb{R}$.

Propriété 29. *Module de zz', z/z'*

Remarque : $\mathbb{C}$ c'est cool, mais on a perdu qqchose : l'ordre, c'est le bordel, mais il reste le module... Formule de l'inverse : $1/z = \bar{z}/z\bar{z}$

2 Géométrie dans le plan complexe

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$.

Définition 18. On appelle *affixe* d'un point A de coordonnées cartésiennes $(x;y)$ le nombre complexe : $z_A = x + \mathrm{i}y$.

D'après l'unicité des coordonnées cartésiennes d'un point dans un repère donné et de la forme algébrique d'un complexe, tout point du plan a une unique affixe et tout complexe est l'affixe d'un point du plan. On peut donc identifier $\mathbb{C}$ au plan, on parle alors du *plan complexe* de la même manière que l'on parlait de la droite réelle.

Propriété 30. *Dans le plan complexe, les réels sont représentés par l'axe des abscisses et les imaginaires purs par l'axe des ordonnées.*

Propriété 31 (Interprétation géométrique du conjugué)**.** *Soit un point A d'affixe z et A' d'affixe z'. Alors A et A' sont symétriques par rapport à (Ox) ssi $z' = \bar{z}$.*

Définition 19. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on appelle *affixe du vecteur* $\overrightarrow{w}$ le complexe $z_{\overrightarrow{w}} = a + ib$

Ainsi on a grace aux règles de calcul sur les complexes :

Propriété 32. *Pour deux points A et B d'affixe z_A et z_B, on a :* $\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A}$.

Propriété 33 (Interprétation géométrique du module)**.** *Soit un point A d'affixe z_A et B d'affixe z_B.*

$$\boxed{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A|}$$

Cette égalité est vraie car le repère $(O\ ;\vec{u},\vec{v})$ estorthonormé.

Exercice n° 13

Prouver que le triangle OAB est isocèle rectangle où A et B sont les points d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + 2i \quad \text{et} \quad z_B = -2 + i$$

Exemple: (fondamental) L'ensemble des points d'affixe de module 1 est le cercle de centre O et de rayon 1.

Propriété 34. *Deux vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont colinéaires ssi il existe un réel k tels que :*

$$z_{\overrightarrow{w}} = kz_{\overrightarrow{w'}}$$

Démonstration. On l'écrit avec les coordonnées de vecteurs. Straight forward. □

Propriété 35. *Trois points A, B, C sont alignés ssi il existe un réel k tel que :*

$$z_B - z_A = k(z_C - z_A)$$

3 Équation du second degré

L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{C}$ toutes les équations du second degré à coefficients réels. *i.e.* de la forme :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$$

3.1 Forme canonique

On commence à la main, sans formule, en utilsant la forme canonique.

Exemple: On veut résoudre : $z^2 + 2z + 5 = 0$:

$$z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 - 1 + 5 = (z+1)^2 + 4 = (z+1)^2 - (2\mathrm{i})^2$$

D'où la factorisation et la résolution :

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \iff (z + 1 - 2\mathrm{i}) \cdot (z + 1 + 2\mathrm{i}) = 0 \iff z \in \{-1 + 2\mathrm{i}\,;\ -1 - 2\mathrm{i}\}$$

Résoudre de la même manière les équations du second degré suivantes dans $\mathbb{C}$:
(a) $z^2 - 4z + 5 = 0$ (b) $z^2 + 6z + 11 = 0$ (c) $2z^2 - 4z + 3 = 0$

3.2 Formules

Cette technique vue par factorisation grâce à la forme canonique est systématique et on peut donc obtenir des formules, similaires à celles des racines réelles.

1. Mettre $az^2 + bz + c$ sous forme canonique. On fera apparaître $\Delta = b^2 - 4ac$

2. On suppose que $\Delta < 0$. Écrire $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ comme le carré d'un nombre complexe.

3. En déduire une factorisation de $az^2 + bz + c$ sous la forme :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - \overline{z_1}) \quad \text{où } z_1 \in \mathbb{C}$$

4. En déduire les formules donnant les racines complexes de $az^2 + bz + c$ dans le cas où le discriminant est négatif.

Remarque : Comme dans $\mathbb{R}$, si b, le coefficient de z, est nul on n'applique pas ces formules comme un âne. On procède ainsi :

Exemple: $z^2 + 3 = 0 \iff z^2 - (\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 0 \iff z \in \{\mathrm{i}\sqrt{3}\,;\ -\mathrm{i}\sqrt{3}\}$

3.3 Application

Exercice n° 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en appliquant les formules précédentes.

1. (a) $2z^2+4z+5=0$ (b) $-2z^2+6z-5=0$ (c) $-5z^2+2z+2=0$
2. (a) $z^2+z+1=0$ (b) $(z^2+2)(z^2-4z+4)=0$ (c) $(z+1)^2=-(2z+1)^2$
3. (a) $2z^4-9z^2+4=0$ (b) $\left(z^2+1\right)^2=1$ (c) $\dfrac{z-1}{z+1}=z+2$

Exercice n° 15

Équation à coefficients symétriques. Soit l'équation (E) : $z^4-5z^3+6z^2-5z+1=0$

Prouver que (E) est équivalente au système : $\begin{cases} u^2-5u+4=0 \\ u=z+\dfrac{1}{z} \end{cases}$

Résoudre $u^2-5u+4=0$, puis résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice n° 16

Un grand classique du rire. On veut résoudre une équation de degré trois dans $\mathbb{C}$. On ne vous donnera pas de formule, mais on vous présentera toujours les choses à peu près ainsi : On exhibe ou fait trouver une « solution évidente » z_0, on factorise par $(z-z_0)$ le polynome de départ, et on est alors ramené à une équation de degré deux.

1. Pour tout complexe z, on pose $P(z)=z^3-12z^2+48z-128$. Calculer $P(8)$. Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout complexe z :

$$P(z)=(z-8)(az^2+bz+c)$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

Chapitre V

Barycentres et droites de l'espace

1 Barycentre : rappels

Rappel des différentes utilisations du barycentre en sciences physiques :

- Centre d'inertie. Cette notion permet de modéliser des systèmes solides complexes par des masses ponctuelles, les forces subies par le système s'appliquant au centre de masse, ou centre d'inertie.
- Point d'équilibre d'un système.
- Utilisation en chimie : molécules polaires (moment dipolaire). Importance pour la question de solubilité d'une molécule dans un solvant.

Feuille de rappels (mathématiques) lue et commentée.
Séances d'exercices, annales à partir des connaissances de première.

Rappels

On peut définir le barycentre d'un nombre quelconque de points pondérés, pourvu que la somme des masses soit non nulle. Je traite ici le cas de trois points.

Définition 20. Soit le système de points pondérés $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ avec : $a+b+c \neq 0$. Il existe un unique point G appelé barycentre de ce système vérifiant :

$$\boxed{a.\overrightarrow{GA} + b.\overrightarrow{GB} + c.\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}} \tag{V.1}$$

Propriété 36 (Homogénéité du barycentre). *Soit k un réel non nul. Le barycentre reste inchangé si on multiplie toutes les masses par k.*

Propriété 37 (Position du barycentre de deux points). *Soit $G = Bar\{(A;a);(B;b)\}$*

(i) $G \in (AB)$.

(ii) Si a et b sont de même signe : G appartient à $[AB]$ et est plus près du point qui est affecté de la masse la plus grande en valeur absolue.

(iii) Si a et b sont de signes contraires : G est en dehors du segment $[AB]$ du côté du point qui est affecté de la masse la plus grande en valeur absolue.

Propriété 38. *Pour tout point M, si $a+b+c \neq 0$ on note $G = Bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ et on a :*

$$\boxed{a.\overrightarrow{MA} + b.\overrightarrow{MB} + c.\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}} \tag{V.2}$$

On le démontre à partir de (V.1) en incrustant le point M dans les quatre vecteurs à l'aide de la relation de Chasles. En particulier si on est dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ on en déduit les coordonnées du G en posant $M = O$ dans (V.2) :

Propriété 39. *Les coordonnées de $G = Bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ dans $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ sont :*

$$\boxed{x_G = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \qquad y_G = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}}$$

En remplaçant M par le point A dans (V.2) on a une expression utile pour placer G :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}}$$

La relation ci-dessus prouve que G appartient au plan (ABC) et que ses coordonnées dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ sont : $G(\frac{b}{a+b+c};\frac{c}{a+b+c})$

Propriété 40 (Théorème d'associativité). *Soit trois réels a, b et c tels que : $a+b+c \neq 0$ et $a+b \neq 0$. On considère alors les deux barycentres :*

$$G = Bar\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \text{ et } H = Bar\{(A;a);(B;b)\}.$$

Alors :

$$G = Bar\{(H;a+b);(C;c)\}$$

Plus généralement, le barycentre G de n points pondérés ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$) est inchangé si on remplace p points pondérés ($p < n$) dont la somme des masses m est non nulle par leur barycentre H (dit partiel) affecté de ladite masse m.

1.1 Droites, segments de l'espace

Dans cette partie, $\mathscr{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace à trois dimensions. A et B sont deux points distincts de $\mathscr{E}$.

Relation vectorielle

On considère le point M_k de $\mathscr{E}$ vérifiant la relation suivante où k désigne un réel :

$$\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AB} \tag{V.3}$$

Alors on a les résultats suivants qui proviennent du repérage sur une droite, car k représente l'abscisse du point M_k dans le repère $(A;\overrightarrow{AB})$ de la droite (AB).

① Lorsque k décrit $\mathbb{R}$, M_k décrit (AB).
② Lorsque k décrit $\mathbb{R}^+$, M_k décrit $[AB)$.
③ Lorsque k décrit $[0\,;1]$, M_k décrit $[AB]$.
④ Lorsque k décrit $\mathbb{R}^*$, M_k décrit (AB) privée de A.
⑤ Lorsque k décrit $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, M_k décrit (AB) privée de M_a. (où $a \in \mathbb{R}$)

Caractérisation barycentrique

Droites

Propriété 41. *La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.* i.e.

$$M \in (AB) \iff \exists (a;b) \in \mathbb{R}^2;\; M = \mathrm{Bar}\{(A;a);(B;b)\} \quad \textit{avec} \quad a+b \neq 0$$

Démonstration. On prouve les deux sens séparément, en utilisant la caractérisation :
$M \in (AB) \iff \exists k \in \mathbb{R};\; \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

□

Segment

Propriété 42. *Le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B avec des masses de même signe.* i.e.

$$M \in [AB] \Longleftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{R}^2;\ M = \mathrm{Bar}\{(A;a);(B;b)\} \quad \textit{avec} \quad a+b \neq 0 \quad \textit{et} \quad ab \geqslant 0$$

Démonstration. cf Première, et feuille de rappels pour la position du barycentres (plus près de quel point ?). Rappels à l'oral sur le cas où les masses sont de signes contraires. □

1.2 Plans et triangles

Caractérisation barycentrique

Plan

Propriété 43. *Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de A, B et C.* i.e.

$$M \in (ABC) \Longleftrightarrow \exists (a;b;c) \in \mathbb{R}^3;\ M = \mathrm{Bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\} \textit{ avec } a+b+c \neq 0$$

Démonstration. On prouve les deux sens séparément, en utilisant la caractérisation :
$M \in (ABC) \Longleftrightarrow \exists (x;y) \in \mathbb{R}^2;\ \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ □

Intérieur d'un triangle

Propriété 44. *L'intérieur du triangle ABC est l'ensemble des barycentres de A, B et C avec des masses strictement positives.*

Démonstration. On prouve les deux sens séparément, géométriquement, par le théorème d'associativité.

① Soit a, b, c trois réels strictement positifs. On considère $M = \mathrm{Bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$. Comme $b+c > 0$ on peut considérer $H = \mathrm{Bar}\{(B;b);(C;c)\}$ qui appartient à $[BC]$, alors par associativité du barycentre :

$$M = \mathrm{Bar}\{(A;a);(H;b+c)\}$$

Comme a et $b+c$ sont du même signe, non nuls, $M \in [AH]$ différent de A et H. Figure. « Donc » M est à l'intérieur du triangle ABC.

② Réciproque, on refait la construction dans l'autre sens. On appelle H l'intersection de $[AM]$ et $[BC]$. Comme $H \in [BC]$ (différent de B et C) alors il existe b et c strictement positifs tels que : $H = \mathrm{Bar}\{(B;b);(C;c)\}$. De même il existe a' et k strictement positifs tels que : $M = \mathrm{Bar}\{(A;a');(H;k)\}$. Par homogénéité en multipliant les masses par $\frac{b+c}{k}$ (strictement positif), on obtient, en notant $a = a' \times \dfrac{b+c}{k}$:

$$M = \mathrm{Bar}\{(A;a);(H;b+c)\} \quad \text{donc} \quad M = \mathrm{Bar}\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$$

□

Remarque. La preuve peut être refaite avec des masses strictement négatives. Par conséquent, on retiendra qu'un point appartient à l'intérieur du triangle ABC ssi il est barycentre de A, B et C affectés de masses non nulles, de même signe.

Remarque. Si une des masse a, b ou c est nulle, le point appartient à un côté du triangle, et si deux masses sont nulles, le point est un sommet du triangle.

Exercice d'application : cf Poly `Barycentres fp3`

2 Représentations paramétriques d'une droite de l'espace

2.1 T.P. sur GeoGebra (cas des droites du plan)

Compte rendu sur feuille par binôme, puis oral en classe. Ramasser quelques comptes rendus.
Questions complémentaires pour faire le point sur leurs connaissances et leur compréhension de la problématique soulevée par le TP (à l'oral) :

① Une représentation paramétrique d'une droite est elle unique ? (Bah non ! observer (1) et (2) qui définissent toutes deux Δ)

② Mais alors, quel lien y a-t-il entre ces deux représentations paramétriques ?

③ Quel nom donne-t-on aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on a trouvé les coordonnées au **6.c.** et **6.d.** ?

④ Que peut-on dire de ces deux vecteurs (directeurs de Δ) ?

⑤ Cette condition de colinéarité est elle suffisante pour établir que les deux systèmes représentent la même droite ?

⑥ Comment caractériser une droite ? (Deux points, oui... mais encore... barycentres... vecteur directeur et un point.)

2.2 Caractérisation analytique d'une droite de l'espace

Introduction

En T.P. on a étudié le problème physique de la trajectoire rectiligne de deux points mobiles dans le plan. On a vu qu'il fallait distinguer point d'intersection des trajectoires et « collision » des deux points mobiles. Dans le plan, pour savoir si des trajectoires rectilignes sont sécantes, il suffit de savoir si les droites sont parallèles, ce qui est simple.
Que donne le même problème dans l'espace ? L'objectif est de savoir déterminer par le calcul si deux droites sont sécantes, et le cas échéant savoir calculer les coordonnées de ce point d'intersection. Pour celà il nous faut une caractérisation analytique d'une droite de l'espace. Malheureusement, il n'y a pas d'équation de droite dans l'espace... On verra ensuite qu'une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ est en fait celle d'un plan.

Une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ est définie :
– Soit par deux points distincts A et B de $\mathscr{D}$. (Alors $\mathscr{D} = (AB)$)
– Soit par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. (Alors $(A; \vec{u})$ est un repère de $\mathscr{D}$)
(Rappels oraux sur les vecteurs directeurs.)

Définition 21. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de $\mathscr{E}$. La droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ où t décrit $\mathbb{R}$.

On veut traduire celà avec des coordonnées. Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Propriété 45 (Représentation paramétrique de droite)**.** *Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace. On note $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de $\mathscr{D}$ et $\vec{u}\,(a; b; c)$un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. (x_A, y_A, z_A, a, b, c sont des réels avec a, b, c non tous nuls).*

La droite $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de $\mathscr{E}$ pour lesquels il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. $\mathscr{D}$ est donc caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \text{ où : } t \in \mathbb{R} \tag{V.4}$$

Démonstration. Straight forward. Deux vecteurs sont égaux ssi ils ont les mêmes coordonnées. Or :

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad t\vec{u}\begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$$

$M \in \mathscr{D} \iff \exists t \in \mathbb{R};\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. En identifiant les trois coordonnées, on obtient le résultat. □

Un système comme (V.4) s'appelle une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$. Le paramètre est t. On peut mettre n'importe quelle lettre à la place de t. Il peut être utile de se représenter t comme le temps (variant dans $\mathbb{R}$) et le point M comme un point mobile dans l'espace en fonction du temps dont les coordonnées vérifient le système (V.4).

Remarque. Une représentation paramétrique comme (V.4) caractérise la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(a;b;c)$. On peut déterminer x_A, y_A, z_A, a, b, c à partir du système que constitue (V.4).

Exercice n° 17

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (IJ) où $I(-1;\ 0;\ 2)$ et $J(3; -2;\ 1)$. Une fois fait : Tout le monde a-t-il la même représentation paramétrique ? En donner une autre.
2. Le point $A(3;0,1)$ appartient-il à (IJ) ? Et $B(3;-2;1)$? Et $C(4;4;4)$?
3. Donner une représentation paramétrique de la droite parallèle à (IJ) passant par A.
4. Déterminer l'intersection de (IJ) avec le plan (xOy).

Solution : On choisit un vecteur directeur, par exemple $\overrightarrow{IJ}(4;-2;-1)$ et un point, I ou J...

Une fois fait : Tout le monde a-t-il la même représentation paramétrique ? En donner une autre.

Remarque. Une droite n'a pas une unique représentation paramétrique. On a le choix pour le vecteur directeur et pour le point. Alors comment savoir si deux représentations différentes caractérisent la même droite ?

Exercices

cf. Représentations paramétriques de droites. fp.1 (fichier `Exos_Repres_par_droites_fp1.tex`)

Compétences à avoir.

① Savoir vérifier si un point appartient à une droite dont on donne une représentation paramétrique.

② Savoir déterminer les coordonnées de deux (ou plus) points sur une droite dont on donne une représentation paramétrique.

③ Savoir déterminer une représentation paramétrique d'une droite $\mathscr{D}$ connaissant :
- Un point et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.
- Deux points distincts de $\mathscr{D}$.
- Un point et sachant que $\mathscr{D}$ est parallèle à une droite $\mathscr{D}'$ dont on a une représentation paramétrique.

④ Savoir décider si deux droites dont on donne des représentations paramétriques sont :
- Parallèles.
- Confondues.
- Sécantes, et dans ce cas savoir déterminer les coordonnées du point d'intersection.

⑤ Savoir déterminer les coordonnées du point d'intersection (si il existe) d'une droite avec un plan (parallèle à un plan de coordonnées d'abord).

Chapitre VI

Équations différentielles

1 Définition, exemples d'équations différentielles

On en a déjà vu lors de la définition de l'exponentielle : $y' = y$.

2 Équation linéaire du premier ordre sans second menmbre

3 Équation linéaire du premier ordre avec second menmbre

Chapitre VII

Probabilités et dénombrement

1 Probabilités conditionnelles

2 Combinatoire

2.1 Dénombrer des listes

Dans ce paragraphe, E désigne un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). On imagine l'existence d'une urne U contenant n jetons sur lequels sont inscrits les n éléments de E.

Définition 22. On appelle *liste* de p éléments de E une énumération **ordonnée** de ces p éléments. On la note comme des coordonnées de points.

Exemple: Si a, b, c sont trois éléments de E, $(a\,;b\,;c)$ et $(a\,;c\,;b)$ sont deux listes distinctes avec les trois éléments a, b et c. Dans ce paragraphe on s'intéresse donc à dénombrer dans des situations où l'**ordre** des éléments compte.

Permutations d'un ensemble

Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U des n jetons, sans remise, et en notant l'ordre de sortie.

Définition 23. On appelle *permutation* de E une liste de ses n éléments.

Exemple: Si $E = \{A,\, B,\, C\}$ il y a six permutations de E et donc six mots distincts avec les trois lettres A, B et C. On les trouve avec un arbre en distinguant les choix pour le 1$^{\text{er}}$, le 2$^{\text{e}}$ et le 3$^{\text{e}}$ élément : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Définition 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $n!$ l'entier appellé *factorielle* n défini par : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention on pose $0! = 1$

Propriété 46. *Il y a* $n!$ permutations *des n éléments de E.*

Démonstration. On le prouve avec un arbre ou en imaginant remplir des cases : Il il a n choix pour le 1$^{\text{er}}$ élément, et pour chacun de ces choix il y a $n-1$ choix pour le 2$^{\text{e}}$ élément ... *etc* puis plus qu'un choix pour le dernier élément. On trouve donc : $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ □

Exemple: Cinq chevaux font la course. Combien y a-t-il d'arrivées possibles (on suppose qu'il ne peut pas y avoir d'*ex-æquo*). Une arrivée est une permutation de l'ensemble des cinq chevaux. Il y a donc $5! = 120$ quintés possibles avec 5 chevaux donnés.

Liste sans répétition de p éléments parmi n

Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U de p jetons, **sans remise**, et en notant l'ordre de sortie. Où p est entier, $1 \leqslant p \leqslant n$.

Définition 25. Une *liste sans répétition* de p éléments de E est une liste où les p éléments sont deux à deux distincts.

Propriété 47. *Il y a* $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))$ *listes sans répétition de p éléments de E.*

Démonstration. On le prouve avec un arbre ou en imaginant remplir des cases : Il il a n choix pour le 1^{er} élément, et pour chacun de ces choix il y a $n-1$ choix pour le 2^{e} élément ... *etc* puis $(n-(p-1))$ choix pour le p^{e} et dernier élément. □

Exemple: Combien y a-t-il de tiercés possibles avec 10 chevaux au départ ? Ici E est l'esemble des 10 chevaux. Un tiercé est une liste sans répétition de trois de ces chevaux. Il y a donc : $\dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés possibles avec 10 chevaux au départ.

Liste avec répétition de p éléments parmi n

Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U de p jetons, **avec remise**, et en notant l'ordre de sortie. Ici $p \in \mathbb{N}$. On peut donc avoir $p \geqslant n$.

Définition 26. Une *liste avec répétition* de p éléments de E est une liste où les p éléments ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.

« Avec répétition » est donc à comprendre au sens où « il peut y avoir répétiton ». Remarquez que si $p > n$ il y a nécéssairement répétition. (C'est le principe des tiroirs : Si il y a plus de chaussettes que de tiroirs, il y a au moins un tiroir qui comporte au moins deux chaussettes.)

Propriété 48. *Il y a n^p listes avec répétition de p éléments de E.*

Exemple: Combien y a-t-il de points de l'espace dont les coordonnées sont -1 ou 1 ? Ici $p = 3$ et $n = 2$ car $E = \{-1;\ 1\}$. Il y a deux choix pour l'abscisse, deux pour l'ordonnée et deux aussi pour la cote. Soit $2^3 = 8$ points en tout. Ce sont les coordonnées des sommets d'un cube.

2.2 Combinaisons

Maintenant on ne dénombrera plus des listes mais des sous ensembles de E, l'ordre des éléments ne comptera pas. E désigne encore un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et p désigne un entier compris entre 0 et n.
Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U de p jetons, **sans remise**, et sans tenir compte de l'ordre de sortie.

Choisir p éléments parmi n

Définition 27. Une *combinaison* de p éléments de E est un sous ensemble (ou partie) de E qui comporte p éléments.

Définition 28. Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté : $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n ». (En France on le notait autrefois C_n^p)

Exemple: Si $E = \{a\,;\, b\,;\, c\}$, alors :

- $\binom{3}{3} = 1$. Il y a une combinaison de trois éléments de E, c'est E lui même.
- $\binom{3}{2} = 3$. Il y a trois combinaisons de deux éléments de E : $\{a\,;\, b\}\,;\, \{a\,;\, c\}\,;\, \{b\,;\, c\}$
- $\binom{3}{1} = 3$. Il y a trois combinaisons d'un élément de E : $\{a\}\,;\, \{b\}\,;\, \{c\}$
- $\binom{3}{0} = 1$. Il y a une combinaison de 0 élément de E c'est l'ensemble vide : $\emptyset$

Calculette. Pour calculer $\binom{5}{3}$ à la calculette, utiliser la fonction notée nCr (5 nCr 3 EXE). Menu Proba (TI : Math/Prb, Casio : Optn/Prob).

Nombre de combinaisons

Propriété 49. $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

Démonstration. On sait qu'il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ listes sans répétition de p éléments de E. Quand on a un ensemble à p éléments il y a $p!$ permutations, soit $p!$ listes sans répétition avec ces p éléments. C'est pourquoi pour obtenir le nombre de parties (*i.e.* de combinaisons) de E à p éléments on doit diviser $\frac{n!}{(n-p)!}$ par $p!$ $\square$

Exemple: Combien y a-t-il de mains différentes au bridge ? (On joue à quatre au bridge avec un jeu de 52 cartes que l'on distribue entièrement). On doit donc compter le nombre de façons de choisir 13 cartes parmi 52, soit $\binom{52}{13} = \frac{52!}{13!(39)!} = 1905040678800 \simeq 1,9.10^{12}$

3 Loi de probabilités discrètes

3.1 Définitions

Soit Ω un univers fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$). On note $(\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les n événements élémentaires qui constituent Ω. Donc $\Omega = \{\omega_1;\, \omega_2;\, \ldots;\, \omega_n\}$

Définition 29. On appelle *variable aléatoire* sur Ω toute fonction X qui va de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ on note $x_i = X(\omega_i)$.

$$X : \quad \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega_i &\mapsto X(\omega_i) = x_i \end{aligned}$$

L'ensemble des x_i est donc l'ensemble des valeurs possibles pour X.

Exemple: *Une urne contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs. On tire sans remise deux jetons dans une urne. On note X le nombre de jetons noirs tirés.*
On peut choisir : $\Omega = \{\{N; N\}; \{N; B\}; \{B; B\}\}$
Alors : $X(\{N; N\}) = 2\,;\, X(\{N; B\}) = 1\,;\, X(\{B; B\}) = 0$.

On peut aussi choisir : $\Omega' = \{(N;N);(N;B);(B;N);(B;B)\}$. On aurait alors : $X((N;B)) = X((B;N)) = 1\dots$

Définition 30. On appelle *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X la donnée pour chaque valeur x_i possible pour X de $p_i = P(X = x_i)$. On la présente en général sous forme de tableau.

Ce tableau est à rapprocher de ceux qu'on peut dresser en statistiques lorsqu'on a une série de valeurs et leur fréquence d'aparition.

Propriété 50. *La somme des $p_i = P(X = x_i)$ vaut 1.*

Cela vient de ce que les « $X = x_i$ » forment une partition de Ω.

Exemple: On reprend l'exemple précédent. On dresse un arbre `(Revoir le code pstricks)`

On trouve $P(N;N) = 0,3$; $P(N;B) = 0,6$; $P(B;B) = 0,1$. D'où la loi de X.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

Définition 31. On appelle *fonction de répartition* d'une variable aléatoire X la fonction F définie sur R par : $F(x) = P(X \leqslant x)$.

Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$, varie de 0 à 1 mais n'est *a priori* pas continue. En effet dans notre cas présent, X ne prend qu'un nombre fini de valeurs. En chacune de ces valeurs x_i, F présente une discontinuité et même plus précisément un saut de hauteur $P(X = x_i)$. Entre deux valeurs consécutives, F est constante.

Exemple: On reprend notre exemple. Pour $x < 0$, $P(X < x) = 0$ et $P(X = 0) = 0,1$ donc $P(X \leqslant 0) = 0,1$. Soit $F(0) = 0,1$ etc …

La connaissance de F permet de rouver la loi de probabilité de X. Plus tard, on définira des variables aléatoires continues, par leur fonction de répartition.

3.2 Espérance mathématique, variance

Définition 32. $E(X) = \sum \dots$

Linéarité

Propriété 51. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Propriété 52. $E(aX + b) = aE(X) + b$

Définition 33. $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

Propriété 53. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

4 Lois continues

Chapitre VIII

Nombres Complexes, forme exponentielle et transformations

1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1.1 Repérage polaire dans le plan

Soit $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan. Un point M y est repéré par ses coordonnées cartésiennes (de DESCARTES) *i.e.* $M(x; y) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Il y a une autre faÃ§on de définir la position du point M : Par la donnée de la longueur OM et de l'angle orienté $(\vec{\imath}; \overrightarrow{OM})$. Cela donne les coordonnées polaires : $M(\rho; \theta)$ où $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$. Donc :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \textbf{et } \theta \text{ vérifie : } \begin{cases} \cos\theta &= \frac{x}{\rho} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\rho} \end{cases}$$

Exemple: Le point M a pour coordonnées cartésiennes $(-\sqrt{3}; 3)$. On calcule ρ :

$$\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

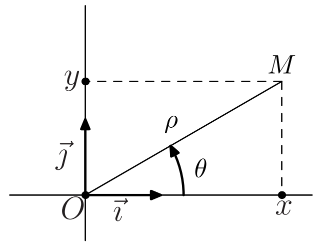
Il faut toujours simplifier la racine. Puis :

$$\begin{cases} \cos\theta &= \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \sin\theta &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta &= -\frac{1}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

On part de l'angle de référence qui a les mêmes valeurs de cos et sin en valeur absolue. C'est $\frac{\pi}{3}$. On place $\frac{\pi}{3}$ sur un cercle trigonométrique, ainsi que l'angle θ cherché et on observe que $\theta = \pi - \frac{\pi}{3}$. Donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ convient. Ainsi des coordonnées polaires de M sont : $(2\sqrt{3}; \frac{2\pi}{3})$. □

x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Pour se souvenir de ce tableau il suffit de connaître le quart de cercle trigonométrique et de se souvenir de : $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$



1.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Traduisons celà en complexe. Soit M un point d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ (où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$). $x + \mathrm{i}y$ est la forme algébrique de z, M a pour coordonnées cartésiennes $(x; y)$. Le rayon polaire ρ est le module de z, et un angle polaire θ s'appelle **un argument** de z.

Définition 34. Tout complexe z peut s'écrire sous la forme appelée forme trigonométrique de z :

$$z = |z| \times (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Un argument θ n'est pas unique, car défini modulo 2π. On note : $\arg(z) = \theta$ un argument de z.

Propriété 54. *Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont même module et même argument à 2π près.*

Exemple: *Cf exemple précédent.* Soit $z = -\sqrt{3}+3\mathrm{i}$. Mettre z sous forme trigonométrique. $|z| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. La suite est identique et donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ d'où : $z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3})$ □

Exercice n° 18

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

1. (a) $z = 1 + \mathrm{i}$ (b) $z = 5 - 5\mathrm{i}$ (c) $z = -3 - 3\mathrm{i}$
2. (a) $z = -4$ (b) $z = \mathrm{i}$ (c) $z = -2\mathrm{i}$
3. (a) $z = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ (b) $z = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ (c) $z = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$

Exercice n° 19

Mettre les nombres complexes z et z' suivants sous forme trigonométrique, ainsi que zz' et $\dfrac{z}{z'}$:

1. (a) $z = 4\mathrm{i}$ et $z' = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ (b) $z = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z' = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$
2. $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ et $z' = \cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'$
   On donnera $\arg(zz')$ et $\arg(\dfrac{z}{z'})$ en fonction de θ et θ'.
3. Démontrer les formules dans le cas général :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad \textbf{et} \quad \arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$$

1.3 Propriétés des arguments

Rappel de trigonométrie $\cos(a+b) =$
$\sin(a+b) =$

Propriété 55. *Pour z et z' deux complexes non nuls :*

① $\arg zz' = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
② $\arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad [2\pi]$
③ $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
④ $\arg z^n = n \arg z \quad [2\pi]$
⑤ $\arg \bar{z} = -\arg z \quad [2\pi]$

Interprétation géométrique

- Argument de l'affixe d'un vecteur : $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$
- $\arg \dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{AB})$

Ensembles de points

- $z \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \arg z = 0 \quad [\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{+*} \Longleftrightarrow \arg z = 0 \quad [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{-*} \Longleftrightarrow \arg z = \pi \quad [2\pi]$
- z est imaginaire pur $\Longleftrightarrow (\arg z = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi] \quad \text{ou} \quad z = 0)$

Exercice n° 20

Déterminer et tracer l'ensemble $\mathscr{E}_i$ des points M d'affixe z vérifiant une des conditions suivantes :

① $\mathscr{E}_1 : (1+i)z \in \mathbb{R}$
② $\mathscr{E}_2 : \arg iz = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$
③ $\mathscr{E}_3 : \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pi \quad [2\pi]$ où $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -1 + \mathrm{i}$
④ $\mathscr{E}_4 : \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ où $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -1 + \mathrm{i}$
⑤ $\mathscr{E}_5 : \arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$ où $z_A = -2 - 2\mathrm{i}$ et $z_B = -\mathrm{i}$
⑥ $\mathscr{E}_6 : \dfrac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}^{-*}$ où $z_A = 3$ et $z_B = 1 + 2\mathrm{i}$

2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Vues les propriétés des arguments, on pose pour θ réel :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

On peut vérifier la cohérence de cette notation avec l'équa diff $y' = iy$ vérifiée par $\theta \longmapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Définition 35. Le complexe non nul z, de module $|z|$ et d'argument θ est mis sous forme exponentielle lorsque l'on écrit : $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Ainsi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ désigne un nombre complexe de module 1. Réciproquement, tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire sous cette forme. Les propriétés suivantes sont valables pour tous réels θ et θ', r et r', pour tous n et k dans $\mathbb{Z}$. Elles découlent des propriétés vues sur le module et les arguments d'un nombre complexe non nul.

Addition d'angles

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$$

Conjugué

$$\overline{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

Module unitaire

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$$

Inverse

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

Quotient

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$$

Puissance-Formule de De Moivre

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$$

Produit, quotient de deux complexes

$$\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \times \left(r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}\right) = rr'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} \qquad \textit{et} \qquad \frac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$$

Valeurs remarquables

$$\mathrm{e}^0 = 1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i} \quad ; \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 \quad ; \quad \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$$

Opposé d'un complexe

$$-r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$$

$\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ **est** 2π **périodique**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \theta = \theta' \ [2\pi]$$

Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \textbf{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Ces formules proviennent de ce que pour tout complexe z :

$$Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \textbf{et} \quad Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$$

Attention ! $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est un nombre complexe, on ne peut donc pas parler de son signe...

Exercice n° 21

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 8\mathrm{i}$

2.1 Paramétrisation d'un cercle

Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points d'affixe de module R, donc de la forme : $R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ décrit $\mathbb{R}$ (ou tout intervalle de longueur au moins égale à 2π). Plus généralement :

Propriété 56. *Le cercle de centre Ω d'affixe z_Ω et de rayon R ($R \in \mathbb{R}^+$) est l'ensemble des points d'affixe :*

$$z = z_\Omega + R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

où θ décrit $\mathbb{R}$ (ou tout intervalle de longueur au moins égale à 2π)

Démonstration. $M \in C \iff |z - z\Omega| = R$ □

On a ainsi une fonction de $\mathbb{R}$ dans le plan qui fournit l'enroulement de la droite réelle sur le cercle que l'on a vu « avec les mains » en seconde.

3 Transformations complexes

Soit $\mathscr{F}$ une transformation du plan qui au point M associe le point M'. *i.e.* $\mathscr{F}(M) = M'$. On associe à cette transformation la fonction complexe f qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de M'. On dit que $z' = f(z)$ **est l'écriture complexe de la transformation $\mathscr{F}$.** On va donner les écritures complexes de trois transformations usuelles.

3.1 Translation

Propriété 57. *Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe b. L'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{w}$ est :*

$$\boxed{z' = z + b}$$

Démonstration. Ici $\mathscr{F}$ est la translation de vecteur $\vec{w}$.

$$\mathscr{F}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \iff z' - z = b \iff z' = z + b$$

□

3.2 Homothétie

Propriété 58. *Soit* Ω *un point d'affixe* z_Ω *et* $k \in \mathbb{R}^*$. *L'écriture complexe de l'homothétie de centre* Ω *et de rapport* k *est :*

$$\boxed{z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)}$$

Démonstration. Ici $\mathscr{F}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

$$\mathscr{F}(M) = M' \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \iff z' - z_\Omega = k(z - z_\Omega)$$

$\square$

3.3 Rotation

Propriété 59. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *L'écriture complexe de la rotation de centre* Ω *et d'angle* θ *est :*

$$\boxed{z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_\Omega)}$$

Démonstration. Ici $\mathscr{F}$ est la rotation de centre Ω et d'angle θ.

- Si $M = \Omega$ alors $\mathscr{F}(M) = M' \iff M' = \Omega \iff z' = z_\Omega$. Car le centre d'une rotation est l'unique point invariant par cette rotation. L'égalité voulue est donc vraie (0=0)
- Si $M \neq \Omega$ alors $\mathscr{F}(M) = M'$ signifie :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \textbf{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$$

Ce qui se traduit en module et argument par :

$$|z' - z_\Omega| = |z - z_\Omega| \quad \textbf{et} \quad \arg(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega}) = \theta[2\pi]$$

C'est à dire que le complexe $\frac{z'-z_\Omega}{z-z_\Omega}$ est de module 1 et d'argument θ. Il est donc égal à $\mathrm{e}^{i\theta}$. D'où le résultat :

$$\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z' - z_\Omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - z_\Omega)$$

$\square$

Cas particulier. $z' = \mathrm{i}z$ est l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Donc le triangle OMM' est isocèle rectangle en O.

Suites adjacentes

4 Convergence monotone

4.1 Limites par la définition, rappels

On va énoncer des résultats sur les suites, ils se traduisent aussi en énoncés valables pour les fonctions. Dans la suite, (u_n) désigne une suite réelle, définie sur $\mathbb{N}$.

Définition 36. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$, si pour tout réel M fixé il existe un rang p à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à M. *i.e.*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n \geqslant M$$

Le rang p dépend de M et *a priori*, plus M est grand, plus p sera grand.

Remarque. Ce n'est pas pareil que de dire que « la suite n'est majorée par aucun réel ». En effet la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n \times (-1)^n$ n'est majorée par aucun réel mais elle ne tend pas vers $+\infty$.

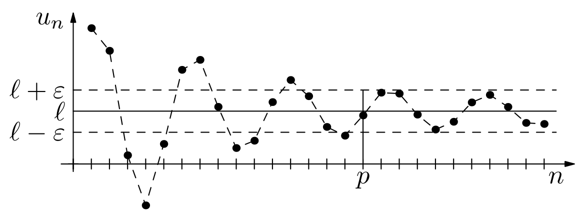
Définition 37. On dit que (u_n) converge vers un réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque. On peut dans cette définition se restreindre aux intervalles ouverts centrés en ℓ, c'est à dire de la forme $]\,\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon[$ où ε est un réel strictement positif. De plus dire $u_n \in\,]\,\ell-\varepsilon; \ell+\varepsilon[$ signifie que $u_n - \ell \in\,]-\varepsilon; \varepsilon[$ soit encore $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Cette définition est donc équivalente à :
« Aussi petit que soit ε strictement positif, au bout d'un moment, tous les termes de la suite sont à une distance strictement inférieure à ε du réel ℓ. » Ce qui se note ainsi :

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Le rang p dépend de ε et *a priori*, plus ε est petit, plus p sera grand.



Définition 38. Une suite non convergente est dit *divergente*.

Dire (u_n) diverge ne signifie pas « (u_n) n'a pas de limite ». L'ensemble des suites divergentes contient les suites qui tendent vers $+\infty$, celles qui tendent vers $-\infty$ et celles qui n'ont pas de limite. On peut par exemple dire : « (u_n) diverge vers $+\infty$. »

4.2 L'axiome de la convergence monotone.

Une suite croissante ne tend pas nécéssairement vers $+\infty$, elle peut aussi converger. On admet le résultat suivant (c'est un axiome) qui est lié à la structure de l'ensemble des nombres réels :

Théorème 5 (Convergence monotone). *Une suite croissante et majorée (ou décroissante et minorée) converge.*

Ce théorème est un théorème d'existence, il ne permet pas de calculer une limite. Si (u_n) est croissante est majorée par 3 par exemple, elle converge, mais pas nécéssairement vers 3. Certainement vers un réel inférieur (ou égal) à 3.

5 Étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On se donne une fonction f définie, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $u_0 \in I$.

5.1 Intervalle stable

Définition 39. On dit que I est stable par f si $f(I) \subset I$

Exemples:

1. $f(x) = x(1-x)$ sur $I = [0\,;1]$. I est stable par f, mais pas par $g = 5f$. Il suffit d'étudier f.
2. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $u_0 = \frac{3}{2}$ Vérifier que la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne définit pas une suite.

La condition I stable par f permet de garantir que la suite est définie et que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle I. (récurrence immédiate)

5.2 Sens de variation

Il est faut de dire que f croissante donne (u_n) croissante, on a en fait :

Propriété 60.
1. *f croissante $\Longrightarrow$ (u_n) monotone. Le sens de var est donné par le signe de $u_1 - u_0$*
2. *f décroissante $\Longrightarrow$ (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de monotonies contraires*

Démonstration. Supposons $u_1 > u_0$.

1. Par récurrence. $\mathscr{P}(n)$: « $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ »
2. On pose $p_n = u_{2n}$ et $i_n = u_{2n+1}$. Alors :

$$p_{n+1} = f \circ f(p_n) \quad \textbf{et} \quad i_{n+1} = f \circ f(i_n)$$

Or f dec. implique fof croissante donc par le 1. p et i sont monotones. Supposons p croissante, alors $u_2 \geqslant u_0$ donc, en appliquant f qui est dec. on a $u_3 \leqslant u_1$ donc $i_1 \leqslant i_0$ donc i est dec.

□

Si $f - Id$ est de signe constant, on a un résultat sur le sens de variation de (u_n) :

Propriété 61. *Un critère pour obtenir le sens de variation de (u_n) :*

1. $\forall x \in I,\ f(x) - x \geqslant 0 \implies (u_n)$ *croissante*

2. $\forall x \in I,\ f(x) - x \leqslant 0 \implies (u_n)$ *décroissante*

Démonstration. □

5.3 Convergence

Définition 40. On appelle point fixe d'une fonction f un réel x tel que $f(x) = x$

Théorème 6. *Si f est continue sur un intervalle fermé I et que (u_n) converge, alors la limite est nécessairement un point fixe de f.*

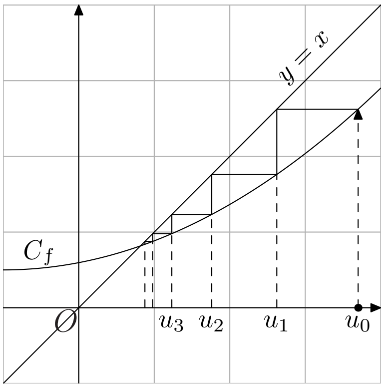
Démonstration. □

Attention : L'existence d'un point fixe ne garantit pas la convergence de (u_n). Mais l'absence de point fixe suffit à justifier que (u_n) ne converge pas.En pratique : On justifie que (u_n) CV (croissante majorée par exemple) puis on détermine la limite en cherchant les points fixes de f. Si le point fixe est unique, c'est facile, sinon il faut raisonner avec le sens de variation de (u_n).

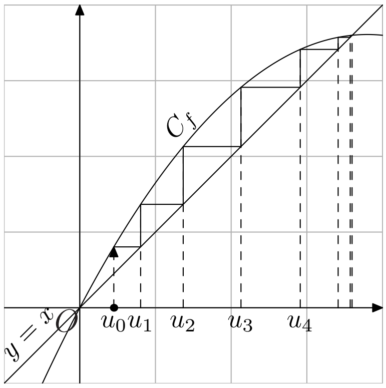
Exemple: $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ et $u_0 \in [0\,;1]$

5.4 Différents comportements asymptotiques.

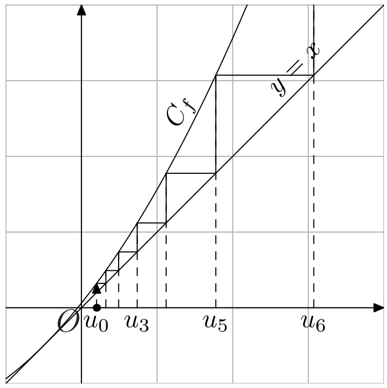
Je vous ai tracé ci-dessous différentes représentations graphiques en « toile d'araignée » d'une suite (u_n) définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. J'ai donc tracé C_f la courbe de f ainsi que la droite d'équation $y = x$.



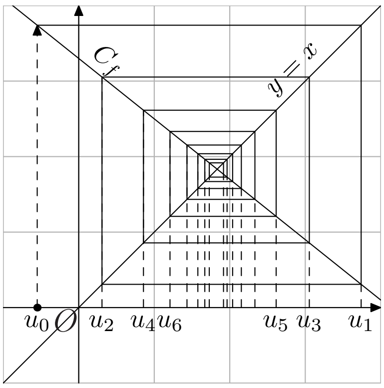
f croissante, (u_n) décroissante, convergeant vers le point fixe.



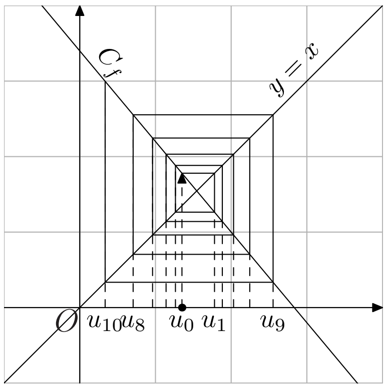
f croissante, (u_n) croissante, convergeant vers le point fixe attractif, zéro est un point fixe répulsif.



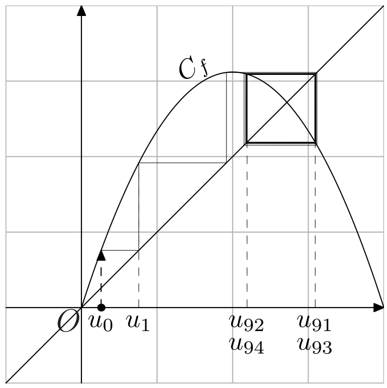
f croissante, (u_n) croissante, divergeant vers plus l'infini, le point fixe est répulsif.



f décroissante, (u_n) non monotone, convergeant vers le point fixe (attractif).



f décroissante, (u_n) non monotone, divergeant (pas de limite ici), le point fixe est répulsif.



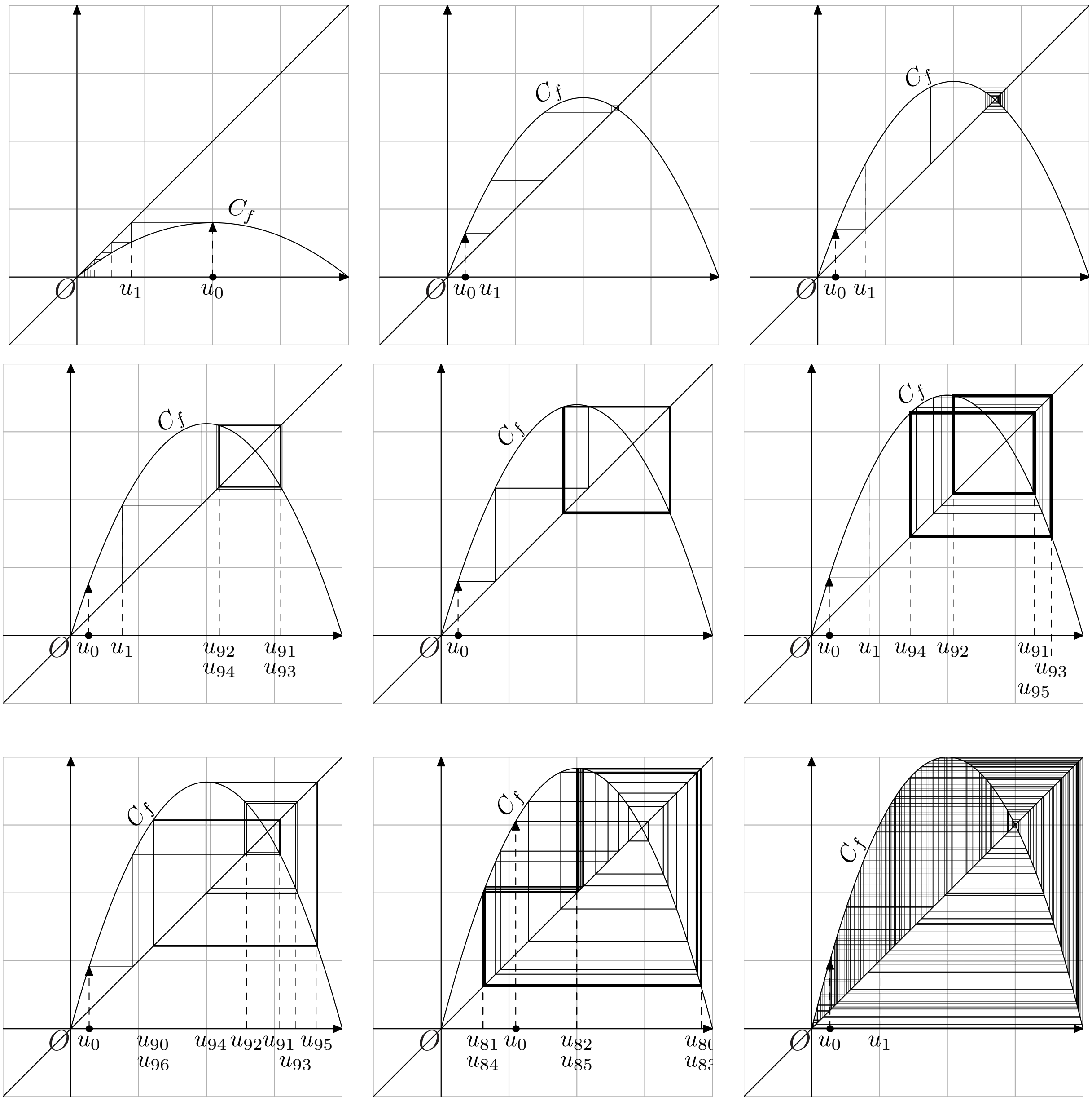
La suite est attirée vers un 2-cycle. Asymptotiquement, elle tend à être 2-périodique. Elle ne converge donc pas, le point fixe est répulsif, mais $f \circ f$ admet un point fixe attractif...

5.5 Suite logistique

Ci–dessous des schémas en toile d'araignée pour la famille de fonctions f_k où :

$$f_k(x) = k \times x(4 - x)$$

Lorsque le paramètre k varie de 0 à 1, on a divers comportements, de la simple convergence à des phénomènes dits chaotiques. L'étude de tels phénomènes constitue le domaine des « systèmes dynamiques discrets ». Il est intimement lié aux fractales.
J'ai rangé les figures par ordre croissant de k. Au début, zéro est le seul point fixe, il est attractif, puis nait un second point fixe qui devient aussitôt attractif alors que zéro devient répulsif. Ce nouveau point fixe attire de plus en plus lentement, et devient répulsif, un 2-cycle devient attracteur. Puis c'est un 4-cycle qui devient attracteur (6$^{\text{e}}$ figure), il s'en suit une série infinie de doublement de périodes (8-cycles, puis 16-cycles...). Ensuite on trouve malgré tout des trois cycles ($k = 0,958$) ce qui indique que le chaos va survenir (d'après le théorème de Sarkovski). Sur la dernière figure (pour $k = 1$), on observe que la suite prend « presque toutes les valeurs » dans $[0\,;4]$.



6 Théorèmes de comparaison

On a les propriétés suivantes de comparaison :

Propriété 62. *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes, et* M *un réel.*

① *Si pour tout* n *à partir d'un certain rang on a* $u_n < M$ *alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$

② *Si pour tout* n *à partir d'un certain rang on a* $u_n < v_n$ *alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Propriété 63. *Si* v_n *diverge vers* $+\infty$ *et que pour tout* n *à partir d'un certain rang on a* $u_n \geqslant v_n$ *alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Utile pour prouver que des suites comme $u_n = 2 * (-1)^n + n$ tendent vers $+\infty$. Ces propriétés sont valables pour les fonctions. Par exemple le théorème des gendarmes vu sur les suites en 1re est valable pour les fonctions.

Théorème 7 (Théorème des gendarmes)**.** *Si on a trois fonctions* f, g *et* h *telles que :*

① *Pour tout* x *supérieur à un réel* x_0 *on a l'encadrement :*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

② f *et* h *ont une limite finie identique* ℓ *en* $+\infty$ *(par exemple)*

Alors g *aussi admet une limite en* $+\infty$ *et c'est aussi* ℓ*.*

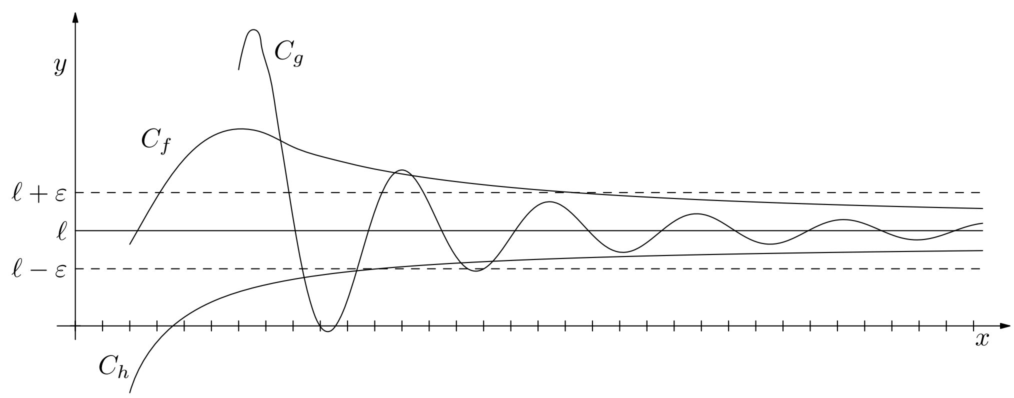


FIG. VIII.1 – Illustration pour la preuve du théorème des gendarmes.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ donc il existe x_1 tel que : $x \geqslant x_1 \implies \varepsilon \leqslant f(x) - \ell \leqslant \varepsilon$
$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \ell$ donc il existe x_2 tel que : $x \geqslant x_2 \implies \varepsilon \leqslant h(x) - \ell \leqslant \varepsilon$
Pour $x \geqslant \max\{x_0, x_1, x_2\}$ on a donc :

$$\varepsilon \leqslant f(x) - \ell \leqslant g(x) - \ell \leqslant h(x) - \ell \leqslant \varepsilon$$

Et donc $\varepsilon \leqslant g(x) - \ell \leqslant \varepsilon$ □

Remarque. Le $+\infty$ peut être remplacé par $-\infty$.

7 Suites adjacentes

Définition 41. On dit que deux suites sont adjacentes si elles vérifient les deux conditions :

① L'une est croissante, et l'autre décroissante.

② Leur différence tend vers zéro.

Théorème 8. *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Pour prouver cette propriété on prouve d'abord le lemme suivant :

Lemme 2. *Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout n, $u_n \leqslant v_n$*

Démonstration. (du lemme.) On pose pour tout n : $w_n = u_n - v_n$. Claim : La suite (w_n) est croissante et tend vers zéro donc est négative. En effet :

$$w_{n+1} - w_n = u_{n+1} - u_n - (v_{n+1} - v_n) = \underbrace{u_{n+1} - u_n}_{\geqslant 0} + \underbrace{(v_n - v_{n+1})}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Ceci pour tout n donc (w_n) est croissante. Si il existait $p \in \mathbb{N}$ tel que w_p soit strictement positif, alors tous les w_n pour n supérieur à p seraient supérieurs à w_p, mais celà est impossible car (w_n) tend vers zéro donc l'intervalle $]-\varepsilon\,;\varepsilon[$ où $\varepsilon = w_p$ contient tous les w_n à partir d'un certains rang. Donc c'est absurde, ainsi w_n est toujours négatif, *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. □

Démonstration. du théorème 8. Soit (u_n) et (v_n) adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante. D'après le lemme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Comme (v_n) est décroissante on a donc en particulier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_0$. Donc u_n est croissante et majorée, ainsi elle converge vers un réel ℓ. De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge vers un réel ℓ'. Il reste à voir que $\ell = \ell'$. Or $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0 = \ell - \ell'$. Donc $\ell = \ell'$.

□

Propriété 64. *Si deux suites sont adjacentes, leurs termes donnent un encadrement de leur limite commune.* i.e. *si (u_n) et (v_n) sont adjacentes (avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante) et si on note ℓ leur limite commune, pour tout n on a :*

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$$

Démonstration. Par un raisonnement identique à celui fait dans le lemme, $(u_n - \ell)$ est croissante et tend vers zéro, donc est négative, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$. De même $(v_n - \ell)$ est décroissante et tend vers zéro, donc est positive. □

Application :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}$$

On considère les suites :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad \sigma_n = S_n + \frac{1}{n!}$$

Prouver que les deux suites ont une limite commune dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près. Suite en DM.

8 Application : preuve du T.V.I. par dichotomie

8.1 Énoncés équivalents au T.V.I.

Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant deux réels a et b avec $a < b$. Soit λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit qu'il existe (au moins) un réel c dans $]a\,;b[$ tel que $f(c) = \lambda$. *i.e.*

$$\exists c \in \,]a\,;b[\,;f(c) = \lambda \tag{VIII.1}$$

Simplifions le problème :

1. On pose $g = f - \lambda$. La fonction g vérifie-t-elle les hypothèses du théorème ?
2. Compléter : $f(c) = \lambda \iff g(\ldots) = \ldots$.
3. Que peut-on dire des réels $g(a)$ et $g(b)$?
4. Justifier que le théorème des valeurs intermédiaires équivaut à :

   Théorème 9. *Soit h une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$*

   $$h(a)h(b) < 0 \implies \exists c \in \,]a\,;b[\,;h(c) = 0$$

8.2 Démonstration

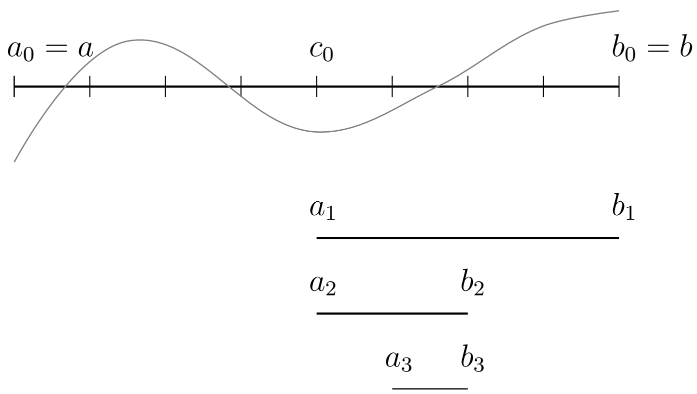
Ce théorème se prouve par dichotomie. On va « couper l'intervalle $[a\,;b]$ en deux », voir dans quelle moitiée h change de signe puis recommencer avec cet intervalle de longueur moitiée, jusqu'à isoler la racine cherchée c. On définit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$$a_0 = a\ ;\ b_0 = b \textbf{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ puis :}$$

- **Si :** $h(a_n)h(c_n) < 0$ — i.e. *h change de signe sur $]a_n\,;c_n[$*
- **alors :** $(a_{n+1} = a_n \quad \textbf{et} \quad b_{n+1} = c_n)$ — *On se place alors sur l'intervalle $[a_n\,;c_n]$*
- **sinon :** $(a_{n+1} = c_n \quad \textbf{et} \quad b_{n+1} = b_n)$ — *On se place alors sur l'intervalle $[c_n\,;b_n]$*

Alors les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, leur limite commune, notons la c vérifie : $h(c) = 0$.

Exemple graphique pour la compréhension. Sur ce schéma on a tracé une courbe représentant une fonction h continue sur $]a\,;b[$ et qui change de signe sur $]a\,;b[$.



On a les valeurs suivantes :

1. $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Bien que h ait des racines sur $]a_0\,;c_0[$ on a $h(a_0)h(c_0) \geqslant 0$ donc $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$
2. $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Cette fois ci, $h(a_1)h(c_1) < 0$ donc : $a_2 = a_1$ et $b_2 = c_1$

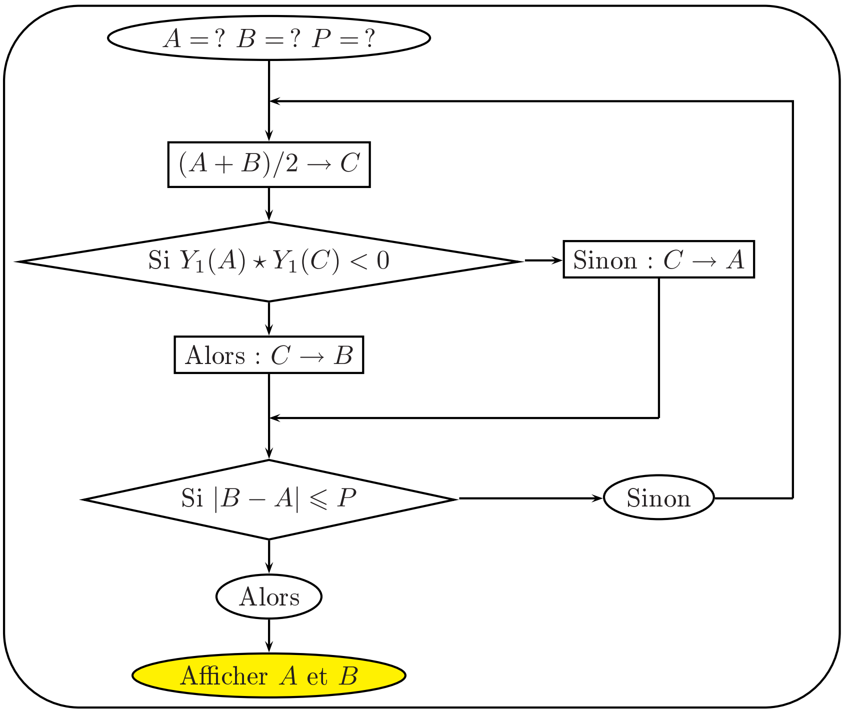
Démonstration. (de la convergence de la méthode)

1. Justifier que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
2. Que représente $b_n - a_n$? Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
3. Prouver que (a_n) et (b_n) ont une limite commune que l'on notera c.
4. Justifier que $h(a_n)$ et $h(b_n)$ convergent vers $h(c)$.
5. On a par construction : $\forall n \in \mathbb{N},\ h(a_n)h(b_n) < 0$. En déduire que $h(c) = 0$.

□

8.3 Algorithme et programmation

On utilise la démonstration précédente pour déterminer numériquement un encadrement d'amplitude P d'une racine d'une fonction. On va calculer les différents termes des suites (a_n) et (b_n) jusqu'à ce que la différence entre b_n et a_n soit inférieure à P. On suppose rentrée en Y_1 dans le menu graph l'expression de la fonction dont on cherche une racine. Voici l'algorithme[1] :



1. On demande à l'utilisateur les réels : A, B, et la précision P souhaitée.
2. On calcule C la moyenne de A et B.
3. On teste pour savoir sur quel intervalle la fonction change de signe.
4. On en déduit les valeurs de a_{n+1} et b_{n+1} qui sont encore notées A et B.
5. Si la précision voulue est atteinte, on affiche « *La racine est encadrée par :* » et on affiche A et B, sinon on recommence.

Pour demander les valeurs de A, B et P on utilise la commande *Input* ou *Prompt* avec une TI et :? avec une Casio. Le test « Si... alors... sinon » se note : If... then... else puis End (IfEnd avec une Casio ou EndIf avec une grosse TI) On utilise aussi la fonction *Goto n* qui renvoit au label numéroté n (*Lbl n*). Tester et comprendre le programme suivant, ensuite taper un programme pour l'algorithme de la dichotomie.

[1]Un algorithme (d'après le nom d'Al Kwarizmi, père de l'algèbre, *al jabr* en arabe) est un nombre fini de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données, pour arriver en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat, et cela indépendamment des valeurs des données.

Casio	TI
$1 \to I$	$1 \to I$
Int(6× Rand)+1→ A	Int(6× Rand)+1→ A
″ Donne un entier entre 1 et 6″	*Disp* ″Donne un entier entre 1 et 6″
Lbl 1	Lbl 1
″N″? → N	*Prompt N*
If $N = A$	If $N = A$
Then ″Gagné en :″ I▲	Then *Disp* ″Gagné en :″ *Disp I*
Else ″Essaye encore″	Else *Disp* ″Essaye encore″
$I + 1 \to I$	$I + 1 \to I$
Goto 1	Goto 1
IfEnd	End

On commence toujours par Shift / Var

- (?) se trouve en F4
- $<$ se trouve en F6 / F3
- If Then, Else, IfEnd dans : COM (F1)
- Goto, Lbl dans : Jump (F3)
- ▲ (pour afficher) en : F5
- La flèche se trouve sur le clavier.

- If Then, Else, Goto, Lbl, End se trouvent dans : Catalogue / Control
- Disp et Prompt se trouvent dans : Catalogue / I/O (In/Out)
- $<$ se trouve dans : Catalogue / Test
- La flèche se trouve sur le clavier (STO comme *store* ou flèche).

Casio	TI
$1 \to I$	$1 \to I$
Int(6× Rand)+1→ A	Int(6× Rand)+1→ A
″ Donne un entier entre 1 et 6″	*Disp* ″Donne un entier entre 1 et 6″
Lbl 1	Lbl 1
″N″? → N	*Prompt N*
If $N = A$	If $N = A$
Then ″Gagné en :″ I▲	Then *Disp* ″Gagné en :″ *Disp I*
Else ″Essaye encore″	Else *Disp* ″Essaye encore″
$I + 1 \to I$	$I + 1 \to I$
Goto 1	Goto 1
IfEnd	End

On commence toujours par Shift / Var

- (?) se trouve en F4
- $<$ se trouve en F6 / F3
- If Then, Else, IfEnd dans : COM (F1)
- Goto, Lbl dans : Jump (F3)
- ▲ (pour afficher) en : F5
- La flèche se trouve sur le clavier

- If Then, Else, Goto, Lbl, End se trouvent dans : Catalogue / Control
- Disp et Prompt se trouvent dans : Catalogue / I/O (In/Out)
- $<$ se trouve dans : Catalogue / Test
- La flèche se trouve sur le clavier (STO comme *store* ou flèche).

Programme de dichotomie

Casio

Pour `Y1` aller dans Graph/Yvar/Y
puis taper 1

$''A''? \to A$
$''B''? \to B$
$''P''? \to P$
Lbl 1
$(A+B)/2 \to C$
$A \to X$
$Y1 \to Y$
$C \to X$
$Y1 \to Z$
If $Y \times Z < 0$
Then $C \to B$
Else ...
IfEnd
If ...
Then
″LA RACINE EST ENCADREE PAR :″
A▲
B▲
Else Goto 1
IfEnd

TI

Pour $\mathtt{Y}_1$ aller dans VAR/Yvar/Y_1

Prompt A,B,P
Lbl 1
$(A+B)/2 \to C$
If $Y_1(A) \times Y_1(C) < 0$
Then $C \to B$
Else ...
End
If ...
Then
Disp ″LA RACINE EST ENCADREE PAR :″
Disp A, B
Else Goto 1
End

Chapitre IX

Logarithme népérien

1 Premières propriétés

La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement 0 et $+\infty$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel strictement positif y, l'équation en x :

$$\mathrm{e}^x = y \tag{IX.1}$$

a une unique solution que l'on note : $\ln(y)$ appelée logarithme néperien de y. Ainsi ln est la fonction réciproque de exp. Elle est définie sur $]0\,;+\infty[$.

$$\forall y \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad \mathrm{e}^x = y \Longleftrightarrow x = \ln(y) \tag{IX.2}$$

Exemples: $\mathrm{e}^0 = 1$ donc $0 = \ln(1)$. $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ donc $1 = \ln(\mathrm{e})$

Définition 42. Pour tout réel x strictement positif on définit le logarithme néperien de x noté $\ln(x)$ comme étant l'unique réel a vérifiant :

$$\exp(a) = x. \quad \text{On a donc :} \quad \boxed{\exp(\ln(x)) = x}$$

Propriété 65. *On a ainsi défini la fonction logarithme néperien sur* $]0\,;+\infty[$. ln *est la fonction réciproque de* exp. *Elle vérifie :*

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[, \quad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x \tag{IX.3}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(\mathrm{e}^x) = x \tag{IX.4}$$

Démonstration. (IX.3) c'est la définition. On prouve la suivante (IX.4) : Soit un réel x, on note $y = \mathrm{e}^x$. Alors par définition $x = \ln(y)$. En remplaçant y dans cette dernière par e^x on a le résultat. □

Exercice n° 22

Dresser le tableau de variation de la fonction ln par un raisonnement graphique de la résolution de $\mathrm{e}^x = y$. Prouver que ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice n° 23

Résoudre les équations suivantes :

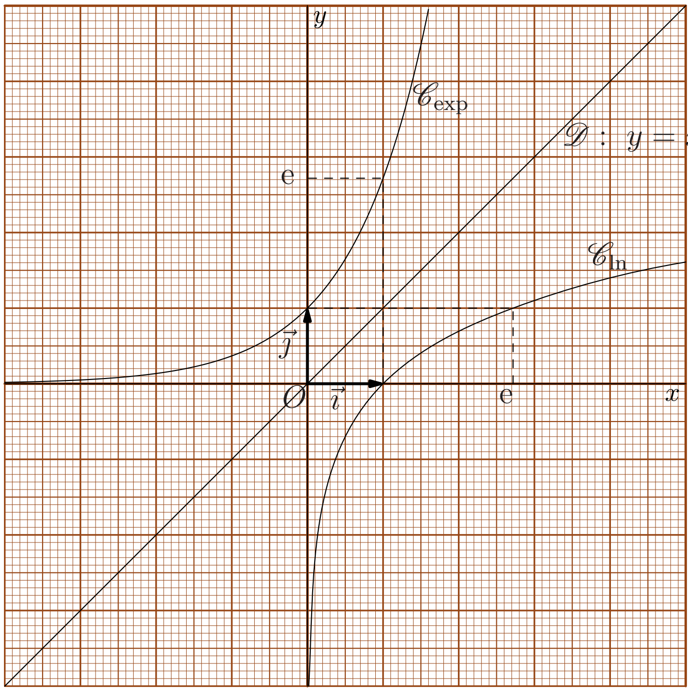


FIG. IX.1 – Courbes de exp et ln.

1. $e^x = 2$
2. $e^{2x} = 4$
3. $e^{e^x} = 3$
4. $\ln(x) = 2$
5. $\ln(x^2) = 4$

Propriété 66. *Comme conséquence de la croissance de* ln *sur* $]0\,;+\infty[$ *on a pour tous réels* a *et* b *strictement positifs :*

$$\ln(a) \leqslant \ln(b) \iff a \leqslant b \quad \textbf{\textit{et}} \quad \ln(a) = \ln(b) \iff a = b$$

Exemple: Résoudre $\ln(x-2) \leqslant 1$ Sol : $\iff x - 2 > 0$ **et** $x - 2 \leqslant \mathrm{e} \iff 2 < x \leqslant \mathrm{e} + 2$

Comme la fonction ln est la réciproque de la fonction exponentielle, leurs courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$

2 Propriétés algébriques

cf T.D. pour les preuves :

2.1 Relation fonctionnelle

Soient deux réels a et b strictement positifs.

1. Simplifier $e^{\ln(a)}$, $e^{\ln(b)}$, $e^{\ln(ab)}$. Ecrire le produit ab de deux manières.
2. En déduire la relation fonctionnelle : $\boxed{\ln(ab) = \qquad\qquad}$
3. L'exponentielle transforme les sommes en produits. Que fait sa fonction réciproque ?

2.2 Puissance

1. Par récurrence on peut montrer que pour tout entier naturel n on a donc : $\boxed{\ln(a^n) = \qquad\qquad}$
2. En posant $a = \mathrm{e}^{\alpha}$ (donc $\alpha = \ldots$) prouver cette même propriété directement.
3. Etablir une formule pour $\boxed{\ln(\sqrt{a}) = \qquad\qquad}$

2.3 Inverse et quotients

1. En calculant $\ln(a \times \frac{1}{a})$ de deux manières, compléter la formule : $\boxed{\ln(\dfrac{1}{a}) = \qquad\qquad}$
2. En déduire la formule : $\boxed{\ln(\dfrac{a}{b}) = \qquad\qquad}$

2.4 Applications

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ uniquement les réels suivants :

1. (a) $\ln(2^9 \times \mathrm{e}^7)$ (b) $\frac{1}{2}\ln(16)$ (c) $\ln(\frac{32}{\mathrm{e}})$
2. (a) $\frac{\ln 2^n}{\ln(2)}$ (b) $\mathrm{e}^{3\ln(2)}$ (c) $\ln(-2)$

3 Propriétés analytiques

3.1 Dérivée

La courbe de la fonction exp et celle de la fonction ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Ainsi géométriquement il est clair que la courbe de ln admet une tangente en tout point.(car exp est dérivable sur $\mathbb{R}$). On admet donc que ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction ln. Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \mathrm{e}^{\ln x} = x$
2. Déterminer la formule pour la dérivée d'une composée de la forme $\ln(u)$ où u est une fonction dérivable, strictement positive. $\boxed{\ln'(x) = \qquad\qquad}$ $\boxed{(\ln(u))' = \qquad\qquad}$

Applications Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis dériver les fonctions suivantes :
(a) $f(x) = x\ln(x)$ (b) $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ (c) $h(x) = \ln x^3 - 1$

3.2 Résoudre des équations et inéquations avec $\ln$

On a vu un outil avec la propriété 66. Mais cela ne suffit pas...Pour étudier le signe d'une dérivée qui comporte des ln on se ramène à résoudre des inéquations du type $\ln(X) \leqslant a$ où $a \in \mathbb{R}$. Compléter et justifier : $\boxed{\ln(X) \leqslant a \iff (X \leqslant \qquad\qquad \textbf{ et } X > \qquad)}$

Application. Résoudre les inéquations suivantes :

1. (a) $1 + \ln(x) \leqslant 0$ (b) $\ln(x-1) < 3$ (c) $\ln(-2x+3) \geqslant 2$
2. (a) $\ln(2x) - \ln(x^2) < 1$ (b) $\ln x + \ln x^2 + \ln x^3 > 1$ (c) $\ln(x^2) - \ln(x+3) < 0$
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ où : $f(x) = x^2\ln(x)$.

Formalisation

On veut résoudre des équations telles que $\ln(X) = a$ ou $\ln(X) \geqslant a$. On détermine d'abord l'ensemble des nombres réels pour lesquels l'inéquation a un sens, sachant que $\ln(X)$ n'est défini que pour $X > 0$.

- Équation. $\ln(X) = a \iff X = \mathrm{e}^a$
- Inéquation.

Exemples: Résoudre :

(a)	$\ln(3x-2) = -1$	(b)	$\ln(2x-1) - \ln(x) = -1$	(c)	$\ln(x-1) \geqslant -3$
(a)	$\ln(x-2) < 5$	(b)	$\ln(-2x+1) - \ln(x) \leqslant 1$	(c)	$\ln(-2x+1) + \ln(x) = -2$

4 Étude de la fonction ln

4.1 Continuité, dérivée

4.2 Limites

- En $+\infty$. Soit A>0 Pour $x > \mathrm{e}^A$ alors $\ln(x) > A$
- En 0. On pose $X = \frac{1}{x}$.
- Croissance comparée :
  ① $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x)/x = 0$ On pose $X = \ln x$.
  ② $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln(x) = 0$

5 Logarithmes et exponentielles de base a

Dans la suite, a désigne un réel strictement positif.

5.1 a^x

Definition, props

Définition 43. $\exp_a(x) = \mathrm{e}^{x\ln a}$. On note : $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$

Remarque. Pour $a = e$ on retrouve e^x c'est pourquoi on dit parfois l'exponentielle de base e.

Remarque. Cette notation est cohérente, elle élargit la notation uniquement valable pour $x \in \mathbb{Z}$. En effet : $\mathrm{e}^{n\ln a} = a^n$

Remarque. On donne ainsi sens à des nombres comme $10^{-7,321}$ ou pire $\pi^{\sqrt{2}}$.

Ne pas confondre a^x et x^a. Toujours partir de $\ln(a^n) = n\ln a$ pour retrouver l'expression correcte.
Prop en vrac :

① Les même prop alg que exp.

② Signe.

③ Dérivabilité

④ Étude de la monotonie : Deux cas.

Courbes à distribuer.

Exercice n° 24

Résoudre $2^x = 3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$, $x^3 = 8$, $x^{\frac{1}{2}} = 3$

Racine énième

On peut avec cette nouvelle notion résoudre l'eq en x (solve for x) : $x^n = a$ où $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 44. Pour $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x strictement positif tel que $x^n = a$, c'est $x = a^{\frac{1}{n}}$ on l'appelle la racine énième (ou n^{e}) de a. On note aussi :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Démonstration. Pour x et a sont strictement positifs :

$$x^n = a \Longleftrightarrow n \ln x = \ln a \Longleftrightarrow \ln x = \frac{1}{n} \ln a \Longleftrightarrow x = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^{\frac{1}{n}} \Longleftrightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$$

□

Remarque. La racine carrée de a apparait donc (enfin) comme $a^{\frac{1}{2}}$. Écrire avec des radicaux $x^{\frac{3}{2}}$ et $x^{-\frac{2}{3}}$ où $x \in \mathbb{R}_*^+$

Exemple: Résoudre $x^3 = 9$.

Exercice n° 25

Application : Coefficient multiplicatif moyen. Un prix augmente de 10%, puis de 20%, puis de 30%, puis baisse de 30%. Quel est le pourcentage d'évolution global du prix ? Quel est le pourcentage moyen d'évolution du prix à chaque étape ? Solution : $CM = 1.2012$ augmentation de $20,21\%$. En moyenne : $1.2012^{0.25} \simeq 1.0469$ soit à chaque étape une augmentation moyenne de $4,7\%$.

Si on a n réels strictement positifs $a_1, \ldots a_n$, alors :

$$a_1 \cdots a_n = \left((a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

Alors multiplier par a_1, puis a_2, puis $\ldots a_n$ revient à multiplier n fois de suite par $(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$.

x^α, généralisations

Certains résultats se généralisent...Pour α réel :

Dérivée

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha - 1}$$

En particulier on retrouve la dérivée de $\sqrt{x}$. Exercice.

Limites

① Pour α strictement positif, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$

② Pour α strictement négatif, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Croissance comparée pour ln (Pour α strictement positif mais surtout intéressant pour $\alpha \in \,]0\,;1[$)

① $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x)/x^\alpha = 0$ On pose $X = x^\alpha$.

② $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln(x) = 0$

Croissance comparée pour exp (Pour α strictement positif)

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x)/x^\alpha = +\infty$

5.2 $\log_a(x)$

On veut maintenant définir sur $\mathbb{R}_*^+$ la réciproque de $\exp_a$.

Définition 45. $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Remarque. C'est la réciproque de la fct $\exp_a$. En effet :

$$x \in \mathbb{R}_*^+ \implies \exp_a \circ \log_a(x) = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\ln a}\ln a} = \mathrm{e}^{\ln x} = x$$
$$x \in \mathbb{R} \implies \log_a \circ \exp_a(x) = \cdots = x$$

Définition 46. En particulier, le logarithme décimal, noté log est le logarithme de base 10. $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}$. C'est la réciproque de $x \mapsto 10^x$

Exemple:

Chapitre X

Géométrie spatiale : plans de l'espace.

1 Équation cartésienne de plan

On se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(a;\ b;\ c)$.

$$M \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

D'où une équation cartésienne de $\mathscr{P}$: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.

Tout plan admettant $\vec{n}\,(a;\ b\,;\ c)$ comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

Réciproquement toute équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ (avec a, b, c non tous nuls) est celle d'un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a;\ b\,;\ c)$.

En pratique : Pour trouver une équation d'un plan $\mathscr{P}$ passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$, on cherche un vecteur normal (ce qui donne a, b et c), puis on trouve d en utilisant que :

$$A \in \mathscr{P} \iff ax_A + by_A + cz_A + d = 0$$

Exercice n° 26

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation : $x + 2y - 3z + 7 = 0$

1. Donner un vecteur normal à $\mathscr{P}$ ainsi qu'un point appartenant à $\mathscr{P}$.
2. Déterminer l'équation du plan $\mathscr{Q}$ parallèle à $\mathscr{P}$, passant par $I(1; 2; 3)$.
3. Soit $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{Q}'$ d'équations respectives : $5x - y + z + 4 = 0$ **et** $-2x - 4y + 6z - 1 = 0$
   Prouver que : $\mathscr{P} \perp \mathscr{P}'$ et $\mathscr{P} /\!/ \mathscr{Q}'$
4. Déterminer une équation du plan médiateur du segment $[AB]$ où : $A(0; -1; 2)$ et $B(-2; 3; 4)$.

Distance d'un point à un plan. La distance d'un point $A(x_A; y_A; z_A)$ au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est notée $d(A; \mathscr{P})$. Elle vaut :

$$\boxed{d(A; \mathscr{P}) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Démonstration. $d(A;\mathscr{P}) = AH$ où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. Soit B un point de $\mathscr{P}$. Justifier que : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}$ puis que :

$$\boxed{AH = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\,|}{\|\vec{n}\,\|}}$$

Enfin, justifier que : $d = -(ax_B + by_B + cz_B)$ puis conclure. □

Demi-espace. Toute inéquation de la forme $ax+by+cz+d \geqslant 0$ ou $ax+by+cz+d \leqslant 0$ définit un demi-espace fermé de frontière le plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$.

Exercice n° 27

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $x-2y+3z-2=0$ et le point $A(1;3;1)$

1. Le point A appartient-il à $\mathscr{P}$? Calculer la distance $d(A;\mathscr{P})$.

2. Le plan $\mathscr{P}$ est la frontière de deux demi-espaces. Donner une inéquation du demi-espace contenant le point A.

Sphère. La sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega;\, y_\Omega;\, z_\Omega)$ et de rayon R ($R\in\mathbb{R}^+$) a pour équation cartésienne :

$$\boxed{(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2}$$

Démonstration. $M\in\mathscr{S} \iff \Omega M = R \iff \Omega M^2 = R^2 \iff \overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega M} = R^2$ □

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

Chapitre XI

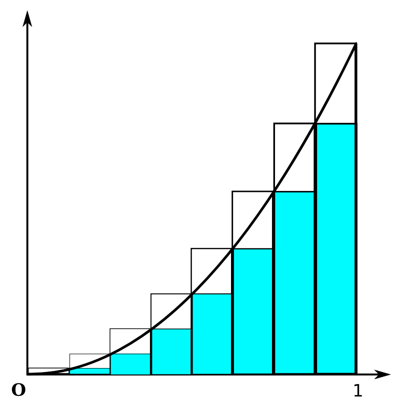
Intégration.

1 Aire sous une courbe.

1.1 Aire sous la parabole.

On considère dans un repère orthonormé la courbe de la fonction carré, sur l'intervalle $I = [0\,;1]$. On veut calculer l'aire du domaine entre la courbe et l'axe des abscisses, pour x variant de 0 à 1. Le principe de la méthode exposée était déja connu d'Archimède, et a donné lieu bien plus tard (Newton, Leibniz puis Riemann) à la théorie de l'intégration.

Principe : On se donne un $n \in \mathbb{N}^*$. On découpe l'intervalle I avec une *subdivision* de I en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$. On considère alors (cf figure pour n= ?) les aires de deux suites de rectangles, de manière à obtenir un encadrement de l'aire cherchée. On calcule les deux aires, puis on fait tendre n vers l'infini.



Compléter la figure en notant les abscisses des sommets des rectangles qui sont sur l'axe des abscisses. On note a_n l'aire des rectangles qui sont sous la courbe et A_n celle des rectangles qui vont de l'axe des abscisses jusqu'au dessus de la courbe.

1. Calcul de a_n :

a. L'aire du premier rectangle sous la courbe est nulle, celle du second est $\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}$.

b. Écrire sans, puis avec symbole sigma l'expression de a_n.

2. Procéder de même pour donner l'expression de A_n en fonction d'une somme de carrés d'entiers.

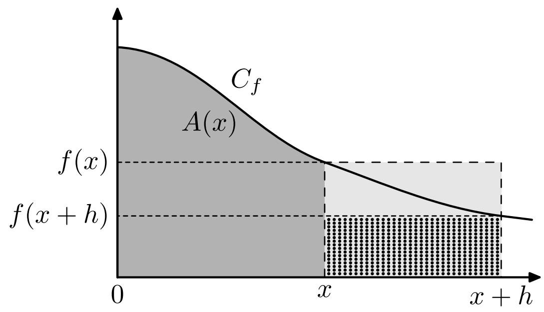
3. Calculer et donner la limite de $A_n - a_n$.

4. En utilisant la formule : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ prouver que A_n et a_n ont une limite commune, et en déduire l'aire cherchée que l'on note :

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$$

1.2 Fonction aire.

On étudie un cas un peu plus général. On considère une fonction f décroissante et continue sur un intervalle . On note C_f sa courbe. Sur la figure, f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On appelle $A(x)$ l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses pour les abscisses variant de 0 à x. C'est le domaine grisé.



1. Donner en utilisant les rectangles tracés un encadrement pour $h > 0$ de la différence :

$$A(x+h) - A(x)$$

en fonction de f.

2. En déduire que la fonction A est dérivable en x, et donner l'expression de sa dérivée.

3. Combien vaut $A(0)$?

4. Peut-on obtenir le même résultat si f est croissante ?

5. Application

- **a.** Vérifier le calcul de la première partie : Trouver une fonction A dont la dérivée a pour expression : x^2 et telle que $A(0) = 0$
- **b.** Déterminer l'aire sous la parabole de la fonction carré mais pour x variant entre 0 et 2.
- **c.** Vérifier qu'avec cette méthode on retrouve bien l'aire du rectangle de côtés a et b.

2 Intégrale d'une fonction continue et positive.

Dans cette partie, f est une fonction continue **positive** sur un intervalle $[a\,;b]$. On se place dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans ce repère.

Unité d'aire. On appelle unité d'aire (u.a.) l'aire d'un rectangle $ABCD$ où $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{\jmath}$. Par exemple si les unités choisies sont de 2 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée pour une unité, alors : 1u.a. = 6 cm^2 (car $= 2 \times 3 = 6$).

2.1 Intégrale vue comme une aire.

Définition 47. L'intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque. On a vu que l'aire s'obtient comme somme d'aires de rectangles de largeur infinitésimale dx et de hauteur $f(x)$ ce qui explique la notation due à Leibniz (1646-1716). Un peu de vocabulaire :

① $\int$ comme somme.

② La variable x est muette, on met ce qu'on veut : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

③ On lit intégrale (ou somme) de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$.

④ a et b sont les *bornes* de l'intégrale. (*Lower bound et upper bound in english*)

Exemple: $\int_{-2}^{0} 3\,\mathrm{d}x = 6$ (rectangle) et $\int_{1}^{3} t\,\mathrm{d}t = 4$ (trapèze)

Valeur approchée d'intégrale. Il suffit de décomposer l'aire cherchée en rectangles, triangles et ou trapèzes pour obtenir une valeur approchée voire un encadrement de l'intégrale cherchée. La calculatrice en mode `G-solve` permet d'obtenir graphiquement une valeur approchée de l'intégrale et un joli coloriage. L'unité est l'unité d'aire (u.a.) Si on veut l'aire en cm^2 il faut calculer combien de cm^2 mesure 1 u.a.

2.2 Fonction aire, primitives.

On a vu en activité que si f est continue, positive et monotone sur un intervalle $[a\,;b]$, alors la fonction :

$$F :\ x \longmapsto \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{XI.1}$$

est une fonction dérivable sur $[a\,;b]$ telle que : $F' = f$ et $F(a) = 0$. $F(x)$ est l'aire (en u.a.) du domaine compris entre $\mathscr{C}$ et (Ox) pour les abscisses allant de a à x. F est une fonction croissante (puisque ici f est positive) et postive.

Définition 48. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I une fonction F dérivable sur I telle que : $F' = f$

Une fonction n'a pas une unique primitive, on dira bien « *une* primitive de f ». Cependant :

Propriété 67. *Si F et G sont deux primitives de f alors elles diffèrent d'une constante.*

Démonstration. $(F - G)' = f - f = 0$ donc $(F - G)$ est une constante. □

Ainsi on pourra dire « *la* primitive de f qui vaut ... en ... ». Par exemple :

Propriété 68 (Unicité)**.** *Soit f continue positive sur un intervalle $[a\,;b]$ alors f admet une unique primitive qui s'annule en a, c'est la fonction « aire » définie en* (XI.1)*.*

Démonstration. On a prouvé l'existence dans le cas d'une fonction monotone en TD. On l'admet dans le cas général. La propriété 67 nous garantit l'unicité. □

Remarque. La condition de continuité est suffisante mais pas nécessaire pour assurer l'existence d'une primitive. Penser à la fonction partie entière. On peut facilement calculer l'aire sous sa courbe, en additionnant des aires de rectangles, et pourtant elle n'est pas continue.

2.3 Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.

Propriété 69. *Soit f continue positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. alors :*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

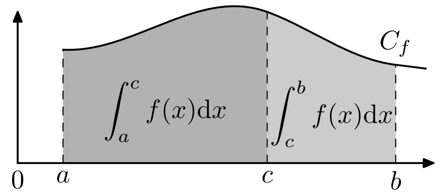
Démonstration. Soit F la primitive qui s'annule en a, alors le résultat est immédiat. Il faut voir que ce calcul ne dépend pas de la primitive choisie pour f :
Si G est une primitive de f, alors il existe une constante réelle k telle que $G = F + k$.
Alors $G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$. □

Notation : On note dans les calculs $[F(x)]_a^b$ pour $F(b) - F(a)$.

Relation de Chasles. D'après la notion intuitive d'aire et les découpages que l'on peut faire d'une surface, on a :

Propriété 70 (Relation de Chasles)**.** *Soit c un réel compris entre a et b.*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$



Démonstration. Soit F une primitive de f.

$$(F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a)$$ □

2.4 Calcul de primitives.

On calcule des primitives de f en reconnaissant en f l'expression d'une dérivée (facile à dire !). On s'aide des propriétés de linéarité de la dérivée pour obtenir les bons coefficients. En effet :

Propriété 71 (Linéarité)**.** *Si f et g sont deux fonctions admettant F et G respectivement comme primitives sur un intervalle, alors pour tous réels λ et μ, on a : $(\lambda F + \mu G)$ qui est une primitive de $(\lambda f + \mu g)$.*

Démonstration. $(\lambda F + \mu G)' = (\lambda F)' + (\mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$ □

Exemple: On cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de f où $f(x) = \sin(2x) + x^3$
On remarque que : $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2\sin(2x)) + \frac{1}{4} \times (4x^3)$
Donc une primitive de f a pour expression : $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}x^4$.
Si on demande *la* primitive de f s'annulant en 0, alors on écrit :
Les primitives de f ont pour expression : $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}x^4 + k$ où k est une constante. Alors $F(0) = -\frac{1}{2} + k$, ainsi *la* primitive de f s'annulant en 0 a pour expression : $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}$

2.5 Existence du logarithme népérien.

La fonction inverse est continue et positive sur $]0\,;+\infty[$, elle admet donc une unique primitive s'annulant en 1 qui a pour expression : $\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ ceci pour tout x de $]0\,;+\infty[$. Cela prouve l'existence du logarithme népérien, donc de sa fonction réciproque, la fonction exponentielle. L'existence de exp avait admise en début d'année.

3 Généralisation de l'intégrale à l'aide d'une primitive.

3.1 Intégrale d'une fonction de signe quelconque.

On admet que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive, et on définit la notion d'intégrale de f à partir de :

Définition 49. Soit f continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et F une primitive de f sur $[a\,;b]$. alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Remarque. C'est la même chose que ce qu'on a énoncé pour la propriété 69, mais on a oté la condition de positivité de f. C'est maintenant notre définition de l'intégrale d'une fonction. Évidemment, les deux définitions coïncident lorsque f est positive.

Linéarité de l'intégrale. D'après la propriété 71 on en déduit :

Propriété 72. *Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et λ, μ deux réels, alors :*

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

3.2 Intégrale et signes.

$\int_a^b f$ et $\int_b^a f$ est-ce la même chose ? Et bien non, en observant la définition, on voit qu'échanger les bornes revient à changer le signe de l'intégrale.

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Si f est négative, qu'est-ce que cela change ? Par linéarité on a en particulier :

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc si f est positive sur $[a\,;b]$, alors $-f$ est négative et son intégrale est l'opposée de l'intégrale de f.

Propriété 73 (Aire algébrique)**.** *Pour une fonction f continue, de signe quelconque sur $[a\,;b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente* l'aire algébrique *du domaine compris entre $\mathscr{C}$, (Ox) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On compte positivement l'aire lorsque f est positive et négativement lorsque f est négative.*

Exemple: Calculer $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$, interpréter géométriquement. Quelle est réellement l'aire du domaine grisé ?

Propriété 74 (Intégrer une inégalité)**.** *Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, telles que :*
$\forall x \in [a\,;b]\,, f(x) \geqslant g(x)$ *alors :*

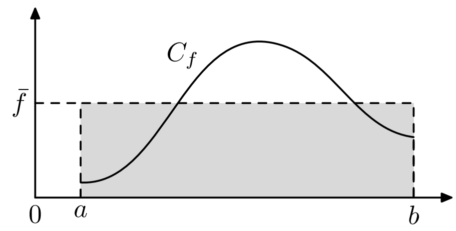
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration. Par hypothèse, la fonction $f - g$ est positive, donc son intégrale (vue comme une aire est positive, puis par linéarité de l'intégrale, on a le résultat. □

3.3 Formule de la moyenne

Définition 50. On appelle moyenne de la fonction f sur $[a\,;b]$ le réel : $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Pour faire une moyenne de n réels, on fait leur somme, et on divise par le nombre n de réels. Ici pour faire la moyenne des $f(x)$, on fait leur « somme » et on divise par la longueur de l'intervalle dans lequel varie x. La figure donne une interprétation graphique dans le cas où f est positive : l'aire du rectangle gris est la même que l'intégrale de f de a à b.



Propriété 75 (Inégalités de la moyenne)**.** *Si f admet un minimum m et un maximum M sur $[a\,;b]$, alors on a l'encadrement :*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Autrement dit la moyenne est comprise entre le minimum et le maximum de f : $m \leqslant \bar{f} \leqslant M$

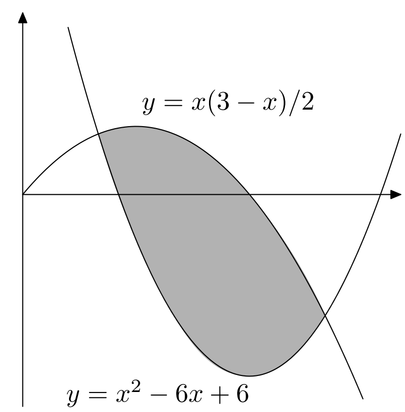
3.4 Intégration par parties.

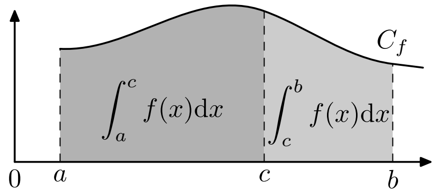
Propriété 76 (I.P.P.)**.** *Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a\,;b]$, alors la fonction $u'v$ est intégrable sur $[a\,;b]$ et on a la formule :*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x =$$

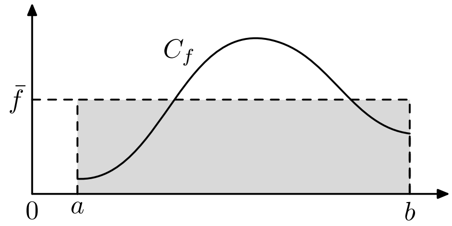
3.5 Aire entre deux courbes

Un exemple : Déterminer l'aire en cm^2 du domaine grisé entre les deux paraboles dont l'équation est donnée. Les unités choisies ont été : 1 cm en abscisse et 0,8 cm en ordonnée.

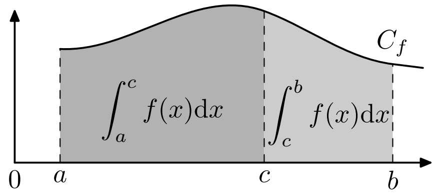




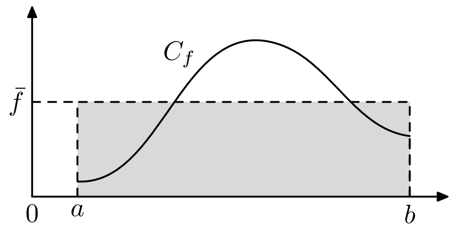
Relation de Chasles pour les intégrales.



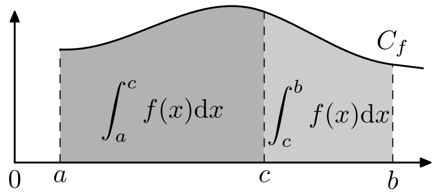
Moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.



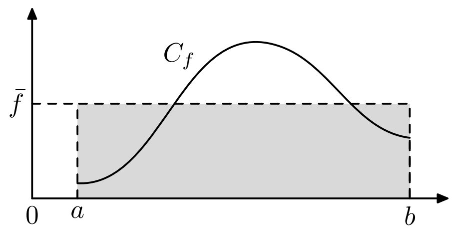
Relation de Chasles pour les intégrales.



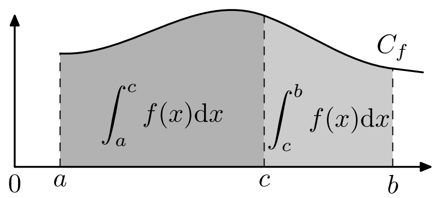
Moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.



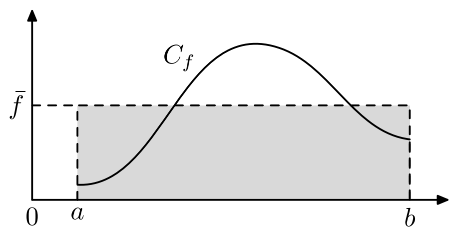
Relation de Chasles pour les intégrales.



Moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.



Relation de Chasles pour les intégrales.



Moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$.

Chapitre XII

Lois de probabilités

1 Combinatoire

À faire plus court

1.1 Dénombrer des listes

Dans ce paragraphe, E désigne un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). On imagine l'existence d'une urne U contenant n jetons sur lequels sont inscrits les n éléments de E.

Définition 51. On appelle *liste* de p éléments de E une énumération **ordonnée** de ces p éléments. On la note comme des coordonnées de points.

Exemple: Si a, b, c sont trois éléments de E, $(a\,;b\,;c)$ et $(a\,;c\,;b)$ sont deux listes distinctes avec les trois éléments a, b et c. Dans ce paragraphe on s'intéresse donc à dénombrer dans des situations où l'**ordre** des éléments compte.

Permutations d'un ensemble

Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U des n jetons, sans remise, et en notant l'ordre de sortie.

Définition 52. On appelle *permutation* de E une liste de ses n éléments.

Exemple: Si $E = \{A,\, B,\, C\}$ il y a six permutations de E et donc six mots distincts avec les trois lettres A, B et C. On les trouve avec un arbre en distinguant les choix pour le 1$^{\text{er}}$, le 2$^{\text{e}}$ et le 3$^{\text{e}}$ élément : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Définition 53. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $n!$ l'entier appellé *factorielle* n défini par : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention on pose $0! = 1$

Propriété 77. *Il y a* $n!$ permutations *des* n *éléments de* E.

Démonstration. On le prouve avec un arbre ou en imaginant remplir des cases : Il il a n choix pour le 1$^{\text{er}}$ élément, et pour chacun de ces choix il y a $n-1$ choix pour le 2$^{\text{e}}$ élément ... *etc* puis plus qu'un choix pour le dernier élément. On trouve donc : $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ $\square$

Exemple: Cinq chevaux font la course. Combien y a-t-il d'arrivées possibles (on suppose qu'il ne peut pas y avoir d'*ex-æquo*). Une arrivée est une permutation de l'ensemble des cinq chevaux. Il y a donc $5! = 120$ quintés possibles avec 5 chevaux donnés.

Liste sans répétition de p éléments parmi n

Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U de p jetons, **sans remise**, et en notant l'ordre de sortie. Où p est entier, $1 \leqslant p \leqslant n$.

Définition 54. Une *liste sans répétition* de p éléments de E est une liste où les p éléments sont deux à deux distincts.

Propriété 78. *Il y a* $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))$ *listes sans répétition de p éléments de E.*

Démonstration. On le prouve avec un arbre ou en imaginant remplir des cases : Il il a n choix pour le 1er élément, et pour chacun de ces choix il y a $n-1$ choix pour le 2e élément ... *etc* puis $(n-(p-1))$ choix pour le p^{e} et dernier élément. □

Exemple: Combien y a-t-il de tiercés possibles avec 10 chevaux au départ ? Ici E est l'esemble des 10 chevaux. Un tiercé est une liste sans répétition de trois de ces chevaux. Il y a donc : $\dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés possibles avec 10 chevaux au départ.

Liste avec répétition de p éléments parmi n

Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U de p jetons, **avec remise**, et en notant l'ordre de sortie. Ici $p \in \mathbb{N}$. On peut donc avoir $p \geqslant n$.

Définition 55. Une *liste avec répétition* de p éléments de E est une liste où les p éléments ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.

« Avec répétition » est donc à comprendre au sens où « il peut y avoir répétiton ». Remarquez que si $p > n$ il y a nécéssairement répétition. (C'est le principe des tiroirs : Si il y a plus de chaussettes que de tiroirs, il y a au moins un tiroir qui comporte au moins deux chaussettes.)

Propriété 79. *Il y a n^p listes avec répétition de p éléments de E.*

Exemple: Combien y a-t-il de points de l'espace dont les coordonnées sont -1 ou 1 ? Ici $p = 3$ et $n = 2$ car $E = \{-1;\ 1\}$. Il y a deux choix pour l'abscisse, deux pour l'ordonnée et deux aussi pour la cote. Soit $2^3 = 8$ points en tout. Ce sont les coordonnées des sommets d'un cube.

1.2 Combinaisons

Maintenant on ne dénombrera plus des listes mais des sous ensembles de E, l'ordre des éléments ne comptera pas. E désigne encore un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) et p désigne un entier compris entre 0 et n.
Le modèle est celui du tirage aléatoire dans l'urne U de p jetons, **sans remise**, et sans tenir compte de l'ordre de sortie.

Choisir p éléments parmi n

Définition 56. Une *combinaison* de p éléments de E est un sous ensemble (ou partie) de E qui comporte p éléments.

Définition 57. Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté : $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n ». (En France on le notait autrefois C_n^p)

Exemple: Si $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$, alors :

- $\binom{3}{3} = 1$. Il y a une combinaison de trois éléments de E, c'est E lui même.
- $\binom{3}{2} = 3$. Il y a trois combinaisons de deux éléments de E : $\{a\,;\,b\}\,;\,\{a\,;\,c\}\,;\,\{b\,;\,c\}$
- $\binom{3}{1} = 3$. Il y a trois combinaisons d'un élément de E : $\{a\}\,;\,\{b\}\,;\,\{c\}$
- $\binom{3}{0} = 1$. Il y a une combinaison de 0 élément de E c'est l'ensemble vide : $\emptyset$

Calculette. Pour calculer $\binom{5}{3}$ à la calculette, utiliser la fonction notée nCr (5 nCr 3 EXE). Menu Proba (TI : Math/Prb, Casio : Optn/Prob).

Nombre de combinaisons

Propriété 80. $\boxed{\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}}$

Démonstration. On sait qu'il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ listes sans répétition de p éléments de E. Quand on a un ensemble à p éléments il y a $p!$ permutations, soit $p!$ listes sans répétition avec ces p éléments. C'est pourquoi pour obtenir le nombre de parties (*i.e.* de combinaisons) de E à p éléments on doit diviser $\frac{n!}{(n-p)!}$ par $p!$ □

Exemple: Combien y a-t-il de mains différentes au bridge ? (On joue à quatre au bridge avec un jeu de 52 cartes que l'on distribue entièrement). On doit donc compter le nombre de façons de choisir 13 cartes parmi 52, soit $\binom{52}{13} = \frac{52!}{13!(39)!} = 1905040678800 \simeq 1,9.10^{12}$

2 Loi de probabilités discrètes

2.1 Définitions

Soit Ω un univers fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$). On note $(\omega_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les n événements élémentaires qui constituent Ω. Donc $\Omega = \{\omega_1;\,\omega_2;\ldots;\omega_n\}$

Définition 58. On appelle *variable aléatoire* sur Ω toute fonction X qui va de Ω dans $\mathbb{R}$. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ on note $x_i = X(\omega_i)$.

$$\begin{aligned} X : \quad & \Omega \to \mathbb{R} \\ & \omega_i \mapsto X(\omega_i) = x_i \end{aligned}$$

L'ensemble des x_i est donc l'ensemble des valeurs possibles pour X.

Exemple: *Une urne contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs. On tire sans remise deux jetons dans une urne. On note X le nombre de jetons noirs tirés.*
On peut choisir : $\Omega = \{\{N;N\};\{N;B\};\{B;B\}\}$
Alors : $X(\{N;N\}) = 2\,;\,X(\{N;B\}) = 1\,;\,X(\{B;B\}) = 0$.

On peut aussi choisir : $\Omega' = \{(N;N);(N;B);(B;N);(B;B)\}$. On aurait alors : $X((N;B)) = X((B;N)) = 1\ldots$

Définition 59. On appelle *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X la donnée pour chaque valeur x_i possible pour X de $p_i = P(X = x_i)$. On la présente en général sous forme de tableau.

Ce tableau est à rapprocher de ceux qu'on peut dresser en statistiques lorsqu'on a une série de valeurs et leur fréquence d'aparition.

Propriété 81. *La somme des $p_i = P(X = x_i)$ vaut 1.*

Cela vient de ce que les « $X = x_i$ » forment une partition de Ω.

Exemple: On reprend l'exemple précédent. On dresse un arbre `(Revoir le code pstricks)`

On trouve $P(N;N) = 0,3$; $P(N;B) = 0,6$; $P(B;B) = 0,1$. D'où la loi de X.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,6$	$0,3$

Définition 60. On appelle *fonction de répartition* d'une variable aléatoire X la fonction F définie sur R par : $F(x) = P(X \leqslant x)$.

Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}$, varie de 0 à 1 mais n'est *a priori* pas continue. En effet dans notre cas présent, X ne prend qu'un nombre fini de valeurs. En chacune de ces valeurs x_i, F présente une discontinuité et même plus précisément un saut de hauteur $P(X = x_i)$. Entre deux valeurs consécutives, F est constante.

Exemple: On reprend notre exemple. Pour $x < 0$, $P(X < x) = 0$ et $P(X = 0) = 0,1$ donc $P(X \leqslant 0) = 0,1$. Soit $F(0) = 0,1$ etc ...

La connaissance de F permet de rouver la loi de probabilité de X. Plus tard, on définira des variables aléatoires continues, par leur fonction de répartition.

2.2 Espérance mathématique, variance

Définition 61. $E(X) = \sum \ldots$

Linéarité

Propriété 82. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Admis

Propriété 83. $E(aX + b) = aE(X) + b$

Définition 62. $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

Propriété 84. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

2.3 Loi binômiale

Loi de Bernoulli

Répétition de n épreuves identiques indépendantes

3 Lois continues