I Colinéarité de deux vecteurs

Définition 1. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque. Comme $0\vec{u} = \vec{0}$, le vecteur nul est colinéaire à tous les autres vecteurs.

Propriété 1. *Soit* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs du plan.*
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.
Autrement dit, ils sont colinéaires ssi, leur déterminant *est nul, i.e.* $xy' - x'y = 0$.

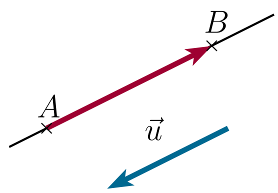
Propriété 2. *On considère quatre points A, B, C et D avec A distinct de B et C distinct de D.*
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ssi, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Propriété 3 (Corollaire)**.** *Trois points A, B et C sont alignés ssi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.*

II Équations cartésiennes d'une droite

Définition 2. Un vecteur $\vec{u}$ non nul est un *vecteur directeur* de la droite (AB) si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Autrement dit, un vecteur non nul est appelé vecteur directeur d'une droite lorsqu'il a la même *direction* que cette droite.



Remarque. Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

Propriété 4. *Deux droites sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.*

Propriété 5. *L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ est une droite de vecteur directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Propriété 6 (Réciproque)**.** *Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\ ;\ b) \neq (0\ ;\ 0)$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.*

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite.

Énoncé : Déterminer une équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $A(-1\ ;\ 4)$.

Réponse : ① Soit $M(x\ ;\ y)$, on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-(-1) \\ y-4 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M \in d &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (x+1) \times 2 - (-3) \times (y-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 2 - (-3y + 12) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 10 = 0. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de d est donc $2x + 3y - 10 = 0$.
② On peut aussi utiliser la propriété 6. $d : 2x + 3y + c = 0$ et on détermine c en utilisant que les coordonnées de A vérifient l'équation : $2 \times (-1) + 3 \times 4 + c = 0$ donc $10 + c = 0$ d'où $c = -10$.