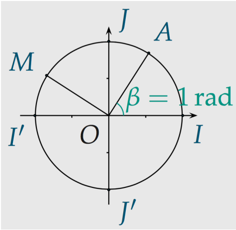
Repérage

Exercice n° 1 — Warm up



Le cercle ci-contre, de centre O et de rayon 1, est appelé cercle trigonométrique.

1. Donner la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$. Que vaut la mesure de $\widehat{IOJ}$ en degrés ?
2. Une mesure en radians d'un angle géométrique $\widehat{IOM}$ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.
   Compléter le tableau suivant donnant la correspondance entre la mesure en degré de l'angle $\widehat{IOM}$ et la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.

mesure en degré	60		90		180
longueur de l'arc		1		$\frac{5\pi}{6}$	π

Exercice n° 2

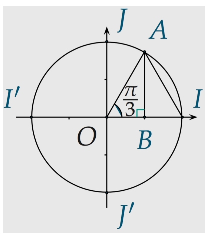
On considère les nombres suivants :

$$\frac{\pi}{4}, -\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \text{ et } -\frac{\pi}{2}.$$

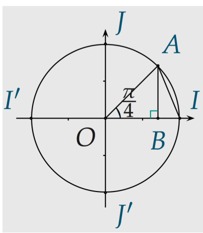
1. Ranger ces nombres dans l'ordre croissant.
2. Quels nombres appartiennent à $]-\pi\,;\,\pi]$?
3. Quels nombres appartiennent à $[0\,;\,2\pi[$?

Exercice n° 3

1. Quelle est la nature du triangle OAI ?
   En déduire $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$.



2. Quelle est la nature du triangle OAB ?
   En déduire $\cos\frac{\pi}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{4}$.



Exercice n° 4

Préciser la mesure de l'angle géométrique correspondant en degré.

x (rad)	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
x (degré)						

Exercice n° 5

Donner une mesure en radian des angles géométriques suivants.

x (degré)	30	45	75	90	135	150
x (rad)						

Exercice n° 6

Compléter le tableau.

x en radian	$\frac{\pi}{3}$	...	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{6}$	...
$\cos x$	...	$-\frac{1}{2}$	...	0	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin x$	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	-1	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice n° 7

Placer sur le cercle trigonométrique les points-images des nombres réels suivants :

$$-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4} \text{ et } \frac{17\pi}{6}.$$

Exercice n° 8 — Angles associés

Placer sur le cercle trigonométrique un angle x quelconque dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ puis les angles associés :

$$-x\,;\; x+\pi\,;\; \pi-x\,;\; x+\frac{\pi}{2}\,;\; \frac{\pi}{2}-x$$

Exercice n° 9 — Intervalles

Représenter en rouge sur le cercle trigonométrique, orienté dans le sens direct, l'arc de cercle correspondant aux points-images des nombres réels compris dans :

1. $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,0\right]$
2. $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right]$
3. $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}\,;\,2\pi\right]$
4. $\left[-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$

Cosinus et sinus d'un nombre réel

Exercice nº 10

Donner des formules pour cosinus et sinus des angles associés vus dans l'exercice 8 en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice nº 11

Donner les coordonnées des points A, B et C points-images des nombres réels $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{13\pi}{6}$ et $-\dfrac{5\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

Exercice nº 12

Soit x un nombre réel tel que $\sin x = \dfrac{1}{5}$ et $x \in \left]\dfrac{\pi}{2} \,;\, \pi\right[$. Calculer $\cos x$.

Exercice nº 13

Soit x un nombre réel tel que $\cos x = \dfrac{4}{5}$ et $x \in \left]-\pi \,;\, 0\right[$. Calculer $\sin x$.

Exercice nº 14 — `Calculette`

Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1. $\sin x = -0{,}8$ et $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2} \,;\, 0\right[$
2. $\sin x = 1{,}2$ et $x \in \left]0 \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice nº 15 — `Calculette`

Déterminer dans chaque cas, s'il existe, le nombre réel x tel que :

1. $\cos x = 2{,}1$ et $x \in \left]0 \,;\, \dfrac{\pi}{2}\right[$
2. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left]-\pi \,;\, -\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice nº 16

Calculer quel que soit x réel, l'expression : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

Exercice nº 17

Déterminer cos et sin de : $\dfrac{3\pi}{4} \,;\, -\dfrac{\pi}{6} \,;\, \dfrac{13\pi}{4} \,;\, -\dfrac{2\pi}{3}$.

Mesures d'un angle orienté

Exercice nº 18

On considère les points A , B, C, D et E, respectivement point-images des nombres suivants :
$\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{3\pi}{4}$ et $-\dfrac{\pi}{4}$.
Donner une mesure des angles orientés :

1. $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}\right)$
2. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$
3. $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right)$
4. $\left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}\right)$
5. $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}\right)$
6. $\left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OD}\right)$

Exercice nº 19

ABCD (en tournant dans le sens direct) est un carré de centre O.
Donner une mesure des angles orientés :

1. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$
2. $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$
3. $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$
4. $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD}\right)$
5. $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$
6. $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$

Exercice nº 20

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
$-\dfrac{21\pi}{4} \,;\, \dfrac{37\pi}{7} \,;\, -\dfrac{2\pi}{3} \,;\, \dfrac{23\pi}{10} \,;\, \dfrac{74\pi}{13} \,;\, \dfrac{47\pi}{6}$

Exercice nº 21

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{6}$.
Donner la mesure principale des angles orientés :

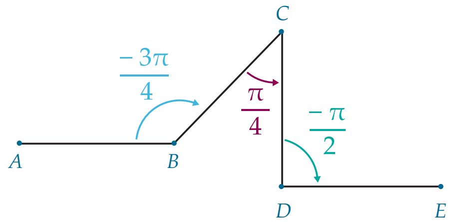
1. $(-\vec{u}, -\vec{v})$
2. $(\vec{v}, \vec{u})$
3. $(-\vec{v}, -\vec{v})$
4. $(-\vec{v}, \vec{u})$

Exercice nº 22

Soit A, B et C trois points tels que :
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{5}$.
Donner la mesure principale des angles orientés : $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) ; \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}\right) ; \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) ; \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}\right)$

Exercice nº 23

ABCDE est la ligne brisée ci-dessous.



Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

Exercice n° 24

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Démontrer que le triangle ABD est rectangle en A.

Exercice n° 25

Donnez les mesures principales des angles orientés ci-dessous sachant que $ABCDEF$ est un hexagone régulier de centre O.

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}\right) =$

$\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OB}\right) =$

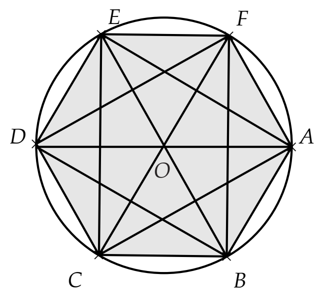
$\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DC}\right) =$

$\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EF}\right) =$

$\left(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{FD}\right) =$

$\left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{CA}\right) =$

$\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EF}\right) =$



Équations trigonométriques

Exercice n° 26

On considère l'équation : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (E).

1. Résoudre cette équation dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ et placer sur le cercle trigonométrique les points correspondants.
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice n° 27

On considère l'équation : $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$ (E').

1. Résoudre l'équation (E') dans $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation (E') dans $]0\ ;\ 4\pi]$

Exercice n° 28

Montrer que l'équation $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ a quatre solutions dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis placer sur le cercle trigonométrique les quatre points correspondants.

Exercice n° 29

On considère l'inéquation $\sin x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de cette inéquation dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.
2. Résoudre cette inéquation dans $]-\pi\ ;\ \pi]$.

Exercice n° 30

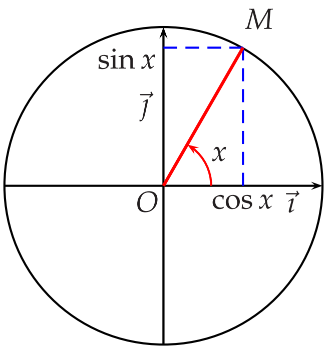
On souhaite résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$:

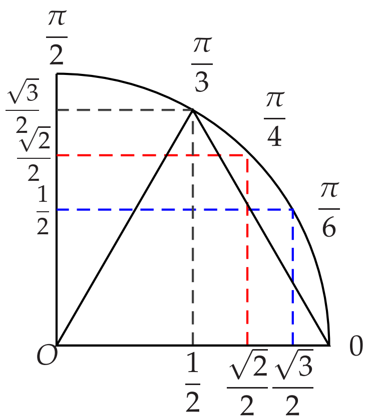
$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

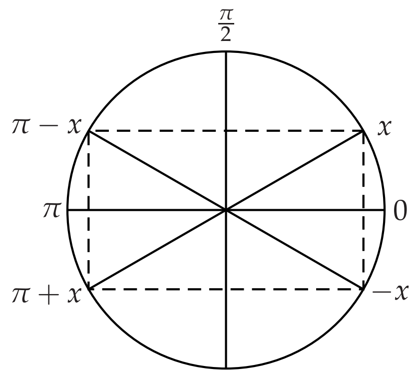
1. On effectue un changement de variable.
   On pose $X = \cos x$ avec $x \in [-1\ ;\ 1]$.
   - **a.** Quelle équation du second degré est équivalente à (**1**) ?
   - **b.** Montrer que son discriminant peut s'écrire : $4(1-\sqrt{3})^2$.
   - **c.** Déterminer les solutions de cette équation du second degré.
2. En déduire les solutions de l'équation (**1**) dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ puis dans $\mathbb{R}$.

Rappels de cours

Soit $(\mathcal{C})$ le *cercle trigonométrique* (de centre O, de rayon 1 muni de son sens de rotation) et x un réel.
- Il lui correspond un unique point M de $(\mathcal{C})$ tel que x soit une mesure en radians de l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
- On définit alors $\cos(x)$ et $\sin(x)$ comme les coordonnées du point M. cf figure. $M(\cos x; \sin x)$.
- On utilise le quart de cercle trigonométrique pour mémoriser les valeurs remarquables de cos et sin.
- On utilise les angles associés pour trouver ceux de multiples des angles remarquables (3e figure).
- Pour un point donné M du cercle $(\mathcal{C})$ il existe une infinité de mesures d'angles $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ qui correspondent à ce point. On appelle *mesure principale* celle qui est dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.







Méthode : Déterminer la mesure principale d'un angle.

Énoncé : Déterminer la mesure principale d'un angle de la forme $\dfrac{p\pi}{q}$. (Exemples : $\frac{23\pi}{4}$ et $\frac{-43\pi}{6}$.)

① On calcule le quotient $\frac{p}{q}$ et on l'arrondit au nombre PAIR le plus proche. On trouve disons $2k$.

② On calcule $2k \times q$ puis le reste $r = p - 2k \times q$ (qui peut être négatif). Alors : $p = 2k \times q + r$

③ On divise par q puis multiplie par π : $\frac{p}{q} = 2k + \frac{r}{q}$ et donc : $\dfrac{p\pi}{q} = 2k\pi + \dfrac{r\pi}{q}$

④ La mesure principale est alors : $\dfrac{r\pi}{q}$.

Exemples : $\frac{23\pi}{4}$ et $\frac{-43\pi}{6}$.

① $23/4 = 5,75$. On arrondit à 6.
② $6 \times 4 = 24$. Donc $23 = 6 \times 4 - 1$.
③ $\frac{23}{4} = 6 - \frac{1}{4}$ donc $\frac{23\pi}{4} = 6\pi - \frac{\pi}{4}$.
④ La mesure principale de $\frac{23\pi}{4}$ est $-\frac{\pi}{4}$.

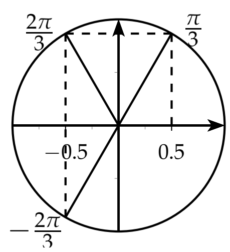
① $-43/6 \simeq -7,17$. On arrondit à -8.
② $-8 \times 6 = -48$. Donc $-43 = -8 \times 6 + 5$.
③ $\frac{-43}{6} = -8 + \frac{5}{6}$ donc $\frac{-43\pi}{6} = -8\pi + \frac{5\pi}{6}$.
④ La mesure principale de $\frac{-43\pi}{6}$ est $\frac{5\pi}{6}$.

Énoncés d'exercices typiques.

1. On considère les angles de mesures $\frac{23\pi}{4}$ et $\frac{-43\pi}{6}$. Placer les points correspondants sur le cercle trigo. En déduire $\cos\left(\frac{23\pi}{4}\right)$, $\sin\left(\frac{23\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{-43\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{-43\pi}{6}\right)$.
2. Résoudre les équations suivantes :
   a. $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$ **b.** $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi[$ **c.** $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;2\pi[$

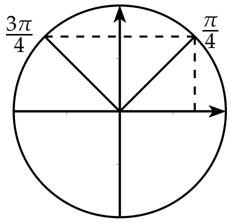
Solutions et méthodes.

1. On détermine la mesure principale de ces angles (cf méthode). On place l'angle remarquable associé (ici $\pi/4$ et $\pi/6$) puis par symétrie on place notre angle. On en déduit que :
   $\cos(\frac{23\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\frac{23\pi}{4}) = \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   De même pour $\frac{-43\pi}{6}$, en remarquant que $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi-\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, donc :
   $\cos(\frac{-43\pi}{6}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{-43\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$
2. Méthode : On place d'abord l'angle remarquable qui a le même cosinus (ou sinus) en valeur absolue puis par symétrie on détermine à quels angles associés correspondent ceux dont le cosinus (ou sinus) est celui cherché. On fait alors attention à l'ensemble dans lequel on demande de résoudre.



a. $\mathcal{S} = \{-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$
b. $\mathcal{S} = \{\frac{4\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\}$

En effet comme $-\frac{2\pi}{3}$ n'est pas dans $[0;2\pi[$ il faut pas prendre la mesure principale ici mais $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.



c. $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

L'angle dans $[0;2\pi[$ qui a le même sinus que $\frac{\pi}{4}$ est :
$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$