I Suites arithmétiques.

Exercice n° 1

Soit une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r.

1. Prouvez que si on connait u_2 et u_9 alors on peut calculer r par la formule : $r = \dfrac{u_9 - u_2}{7}$
2. Établir une formule générale permettant de calculer la raison r si on connait deux termes u_p et u_q (où p et q sont des entiers naturel disctincts).

Exercice n° 2

1. Déterminer les termes inconnus x dans les progressions arithmétiques suivantes :
   a. $3\,;\,x\,;\,7$ **b.** $2\,;\,x\,;\,-4$ **c.** $a\,;\,x\,;\,2a$
2. Prouver que de manière générale si a, x, b sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors x est la moyenne (dite arithmétique) de a et b.

Exercice n° 3

On considère (u_n) la suite des premiers carrés. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = n^2$. On définit pour tout n dans $\mathbb{N}$, la suite $d_n = u_{n+1} - u_n$. Prouver que la suite (d_n) est arithmétique.

Exercice n° 4

On a des tables en forme de carré où on peut mettre quatre personnes, une sur chaque côté. Si on accolle n ($n \in \mathbb{N}^*$) de ces tables en une ligne, combien peut on loger de personne ? On note u_n ce nombre. Quelle est la nature de la suite (u_n), quelle est sa raison, et que représente ce nombre en terme de tables et nombre de personnes ?

Exercice n° 5 **Alcanes**

Les alcanes sont des molécules organiques constituées d'une chaine de n atomes de carbone et d'atomes d'hydrogène liés entre eux par des liaisons simples. On considère les alcanes linéaires (sans cycle). Les plus simples sont le méthane ($n = 1$), l'éthane ($n = 2$), propane ($n = 3$), butane ($n = 4$), pentane ($n = 5$), hexane ($n = 6$)... Quelle est leur formule brute ?

II Suites géométriques.

Exercice n° 6 **Division cellulaire/croissance bactérienne**

C'est bien connu, les cellules et les bactéries se divisent pour se multiplier. Escherichia coli par exemple se divise toutes les 20mn en moyenne. Si on part d'une souche avec une unique bactérie, combien en aura-t-on au bout de deux jours ? Sachant qu'une bactérie pèse environ 7.10^{-16} kg, quelle serait la masse totale au bout de deux jours selon ce modèle ?
Qu'en déduisez vous ? Masse de la Terre : 6.10^{24} kg

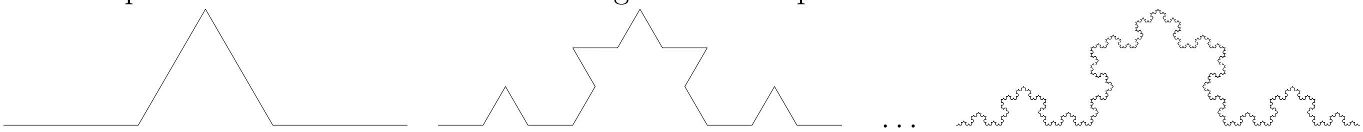
Exercice n° 7 **Balle rebondissante**

Une balle rebondissante est telle que chaque rebond a une hauteur égale à 80 % du rebond précédent.

1. On appelle h_n la hauteur en cm du n-ième rebond, montrer que (h_n) est une suite géométrique.
2. Au bout de combien de rebonds sa hauteur sera-t-elle inférieure au cinquième de sa hauteur initiale ?

Exercice n° 8 — Courbe de Von Koch — Première fractale

On part à l'étape $n = 0$ d'un segment de 3 cm de côté. Expliquer l'algorithme de construction itérative présentée ci-dessous. Calculer la longueur de chaque courbe dessinée.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 6$

Exercice n° 9 — TICE

Le plutonium 239 est un élément radioactif.
On sait que la quantité de plutonium 239 diminue de 0,003 % tous les ans.
On s'intéresse à un déchet radioactif contenant 1 g de plutonium 239 l'année $t = 0$ et on note t le nombre d'années écoulées à partir de ce moment.
On note m_t la masse de plutonium 239, exprimée en gramme, présente dans le déchet à l'instant t.

1. Écrire m_{t+1} en fonction de m_t.

2. Étudier la nature de la suite (m_t) puis écrire m_t en fonction de t.

3. Étudier le sens de variations de la suite (m_t).

4. Déterminer, à l'aide d'un tableur, le nombre d'années nécessaires pour diminuer de moitié la masse de plutonium 239 dans ce déchet.

Cette durée s'appelle demi-vie radioactive du plutonium 239.

Exercice n° 10 — Filtre lumineux

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 20 % de son intensité lumineuse. On superpose n plaques de verre identiques et on note i_n l'intensité du rayon à la sortie de la n-ème plaque exprimée en candela.

1. i_0 étant l'intensité lumineuse du rayon avant son entrée dans la première plaque de verre et i_1 l'intensité à la sortie de cette plaque de verre, exprimer i_1 en fonction de i_0.

2. Étude de la suite (i_n)

- **a.** Quelle est la nature de la suite (i_n) ?
- **b.** Exprimer i_n en fonction de n et de i_0.
- **c.** Étudier les variations de la suite (i_n).

3. Déterminer l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques teintées est égale à 15 candelas.

4. Combien faut-il au minimum qu'un rayon traverse de plaques pour que son intensité lumineuse soit divisée par 5 ?

Exercice n° 11

On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 4}{u_n + 9}$.

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n + 4}{u_n - 1}$.

1. Démontrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4. Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice n° 12 — **Suite arithmético-géométrique**

On considère la suite (u_n) définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.
On dit que cette suite est arithmético-géométrique.

1. Quelle est l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$?

2. Déterminer le point fixe α de f qui vérifie $f(\alpha) = \alpha$. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \alpha$.

3. Prouver que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = f(u_n) - f(\alpha)$ en déduire que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

4. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

III Sommes de termes

Exercice n° 13

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

2. $S_2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$.

3. $S_3 = 3 + 8 + 15 + \cdots + 63$.

Exercice n° 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note S_n la somme des n premiers nombres impairs.
Calculer S_1, S_2, S_3... et faites une conjecture pour la formule générale de S_n. Démontrez la.

Exercice n° 15

A une fête, il y a n convives. Lors d'un toast, les invités trinquent avec tous les autres convives en entre-choquant leurs verres (de jus de fruit). Combien pourra-t-on entendre de tintements de verres ?

Exercice n° 16

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1 + 2 + 4 + 8 \cdots + 1024$.

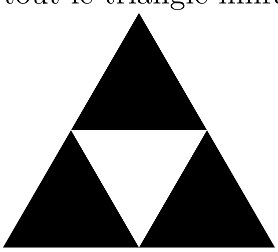
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{1024}$.

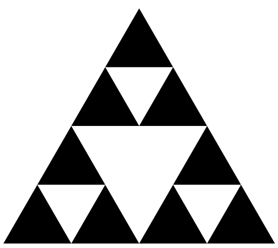
3. $S_3 = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{1000} + \cdots + \dfrac{1}{1\,000\,000}$.

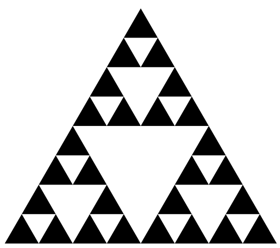
4. Quelle est l'écriture décimale de S_3 ?

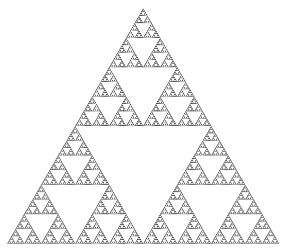
Exercice n° 17 — **Sierpinski**

On part à l'étape $n = 0$ d'un triangle de 4 cm^2. Expliquer l'algorithme de construction itérative présentée ci-dessous. On note b_n la surface blanche ajoutée à chaque étape. Justifier que (b_n) est géométrique. Calculer la surface totale blanche au bout de 10 étapes. Si on continue indéfiniment, tout le triangle finira-t-il par être blanc ?


$n = 1$


$n = 2$


$n = 3$


$n = 7$

Suites arithmétiques.

Définition 1. On appelle *suite arithmétique* une suite où on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre appellé raison de la suite.
Formellement cela signifie que (u_n) est une suite arithmétique de raison r si pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a la relation : $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, mapsto, "+r"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "+2r"'] \arrow[rrr, mapsto, bend right=50, "+3r"'] & u_1 \arrow[r, mapsto, "+r"] & u_2 \arrow[r, mapsto, "+r"] & u_3 & \dots
\end{tikzcd}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + r \\
u_2 &= u_1 + r = u_0 + 2r \\
u_3 &= u_2 + r = u_0 + 3r
\end{aligned}$$

On en déduit une formule pour u_n. On appelle cela l'expression du terme général de la suite :

Propriété 1. *Pour une suite arithmétique (u_n) de raison r, on a :* $\boxed{u_n = u_0 + nr}$

Si la suite commence avec le premier terme u_1 et pas u_0 on a alors : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
Pour calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique on a une formule simple si on connait le premier et le dernier terme de la somme :

Propriété 2. *La somme des termes d'une suite arithmétique se calcule par :*

$$\boxed{(\textit{nombre de termes}) \times (\textit{moyenne du premier et dernier terme})}$$

Il faut faire attention à ne pas se tromper dans le calcul du nombre de termes : De u_0 à u_3 il y a 4 termes (mais $3-0=3$), de u_5 à u_7 il y a 3 termes (mais $7-5=2$)...

Suites géométriques.

Définition 2. On appelle *suite géométrique* une suite où on passe d'un terme au suivant le *multipliant* toujours le même nombre appellé raison de la suite.
Formellement cela signifie que (u_n) est une suite géométrique de raison q si pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a la relation : $\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, mapsto, "\times q"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "\times q^2"'] \arrow[rrr, mapsto, bend right=50, "\times q^3"'] & u_1 \arrow[r, mapsto, "\times q"] & u_2 \arrow[r, mapsto, "\times q"] & u_3 & \dots
\end{tikzcd}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 \times q \\
u_2 &= u_1 \times q = q^2 u_0 \\
u_3 &= u_2 \times q = q^3 u_0
\end{aligned}$$

Propriété 3. *Pour une suite géométrique (u_n) de raison q, on a :* $\boxed{u_n = q^n u_0}$

Si la suite commence avec le premier terme u_1 et pas u_0 on a alors : $u_n = q^{n-1} u_1$

Propriété 4. *La somme des termes d'une suite géométrique se calcule par :*

$$\boxed{(\textit{premier terme}) \times \frac{(\textit{raison})^{\textit{nombre de termes}} - 1}{\textit{raison} - 1}} \quad \textit{par exemple :} \quad u_2 + u_3 + \cdots + u_7 = u_2 \times \frac{q^6 - 1}{q - 1}$$

Activité 1 QUEL EST LE MEILLEUR CONTRAT ? Au moment de l'embauche, une entreprise propose à ses futurs employés deux types de contrat relatifs aux primes. La première année, l'entreprise verse 1500 €. Les primes sont versées une fois par an en fin d'année.

Contrat 1 : Le montant de la prime augmente de 100 € chaque année.
Contrat 2 : Le montant de la prime augmente de 5 % chaque année.

On appelle l'année de l'embauche l'année 0.
L'année suivant l'année de l'embauche est appelée l'année 1...

Simulation avec un tableur Simuler les deux contrats avec un tableur. Faites un graphique et déterminer quel contrat semble le plus intéressant en fonction du temps passé dans l'entreprise.

Étude du contrat 1

1. Donner le montant de la prime à la fin des années 1, 2 et 10
2. On note u_n le montant de la prime à la fin de l'année n. On note u_{n+1} le montant de la prime à la fin de l'année $n + 1$.
   - **a.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   - **b.** Exprimer u_n en fonction de n.

Étude du contrat 2

1. Donner le montant de la prime à la fin des années 1, 2 et 10
2. On note v_n le montant de la prime à la fin de l'année n. On note v_{n+1} le montant de la prime à la fin de l'année $n + 1$.
   - **a.** Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   - **b.** Exprimer v_n en fonction de n.

Interprétation En fonction du temps passé dans l'entreprise, quel contrat vous semble le plus intéressant ?

Exercice n° 18

Reprendre l'activité en comparant les sommes des primes versées pour les deux contrats sur 13 et 18 ans.