Fonctions de référence

Activité 1 Gardez vos distances !

On considère la droite des réels munie du repère $(O\,;\,I)$ sur laquelle on a placé les points A, B et C d'abscisses respectives -4 ; -2 et 4. Faire une figure.

1. Donner les distances AB, CI et OC.

2. Soit x et y deux réels ayant pour points images respectifs M et N sur la droite des réels. On note $d\,(x\ ;\ y)$ la distance MN.

a. Calculer $d\,(3,1\ ;\ 5)$, $d\,(-1,3\ ;\ 4,2)$ et $d\,(-1,3\ ;\ -2,1)$.

b. Compléter.

Si $x \leq y$, alors $d\,(x\ ;\ y) = \ldots - \ldots$
Si $x \geq y$, alors $d\,(x\ ;\ y) = \ldots - \ldots$

Activité 2 Nous n'avons absolument pas les mêmes valeurs !

Soit a un réel, on appelle valeur absolue de a, notée $|a|$, la distance entre a et 0.

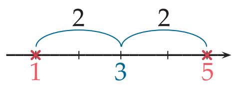
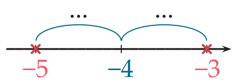
1. Calculer $|-5|$, $|3|$ et $|0|$.

2. **a.** Quels sont les réels dont la valeur absolue est égale à 3 ?

b. Quels sont les réels dont la valeur absolue est égale à -1 ?

3. Pour tous les nombres a et b. Montrer que $d\,(a\ ;\ b) = |a-b|$.

4. Compléter le tableau.

Distance	Schéma	Solutions	Valeur absolue
$d(x\ ;\ 3) = 2$		$x \in \{1;5\}$	$\lvert x-3\rvert = 2$
$d(x\ ;\ 0) = 3$			
			
		$x \in \{0;-4\}$	
			$\lvert x+5\rvert = 3$
$d(x\ ;\ 2) = 3$			
$d(x\ ;\ 0) \leqslant 6$			
		$x \in]-\infty;-2[\cup]4;+\infty[$	

Fonctions de référence

Exercice n° 1

Calculer la distance entre les réels a et b dans chacun des cas suivants.

1. $a = 7$ et $b = -5$ **2.** $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{8}$ **3.** $a = 6$ et $b = 2\pi$

Exercice n° 2 — **Vrai ou Faux ?**

Maurice annonce avoir trouvé deux formules évidentes ci-dessous. Sont-elles correctes ? Argumentez.

1. « Pour tous nombres réels a et b, on a : $|a+b| = |a| + |b|$. »

2. « Pour tous nombres réels positifs a et b, on a : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. »

Exercice n° 3

Résoudre les équations suivantes en se ramenant à des distances sur la droite des réels.

1. $|x-2| = 3$ **3.** $|x+1| \leq 4$

2. $|x-1| = |x+5|$ **4.** $|x-3| > 2$

Exercice n° 4 — `ALGO`

Écrire un algorithme qui calcule et renvoit la valeur absolue d'un nombre entré.

Exercice n° 5

Dans chaque cas, déterminer un encadrement de $\sqrt{x}$.

1. $0 < x < 4$ **2.** $0 \leq x \leq 0,04$ **3.** $1 \leq x < 9 \times 10^6$

Exercice n° 6 — **Quantité conjuguée — Calculer**

Exprimer sans racine carrée au dénominateur. *Rappel :* $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

1. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ **5.** $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}$ **7.** $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **4.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ **6.** $\dfrac{1}{5-3\sqrt{2}}$ **8.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}$

Exercice n° 7

On donne ci-dessous les tableaux de variation d'une fonction u et d'une fonction v.

x	-2		0		4
$u(x)$	0	↘	-2	↗	3

x	-1		0		2		5
$v(x)$	-3	↗	2	↘	0	↗	7

1. Dresser le tableau de variations des fonctions $f = u - 2$ et $g = u + 3$ sur $[-2\ ;\ 4]$.

2. Dresser le tableau de variations des fonctions $h = -3v$ et $k = \dfrac{1}{2}v$ sur $[-1\ ;\ 5]$.

Exercice n° 8

Tracez l'allure des courbes de u puis de f sur un même graphique.

1. $u(x) = x^2 - 4$ puis $f = |u|$. **3.** $u(x) = -2x + 4$ puis $f = |u|$.

2. $u(x) = -x^2 - 1$ puis $f = |u|$. **4.** $u(x) = 4x(1-x)$ puis $f = \sqrt{u}$.

Activité 3 — Demi-cercle

On considère les fonction u et f définies sur $[-2~;~2]$ par : $u\left(x\right) = 4 - x^2$ et $f\left(x\right) = \sqrt{u(x)}$.

Conjectures

1. Dresser le tableau de variation de u sur $[-2~;~2]$, justifier qu'on peut bien définir f sur cet intervalle.
2. D'après les observations faites en TP, conjecturer le tableau de variation de f sur $[-2;2]$.

Preuve :
Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant 2$.

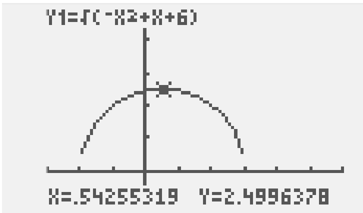
1. Montrer que $u(a) > u(b) \geqslant 0$.
2. En utilisant le sens de variation de la fonction racine carrée, comparer $f(a)$ et $f(b)$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $[0~;~2[$.
4. Par un raisonnement analogue, comparer le sens de variation de u et f sur $[-2~;~0]$.

Demi-cercle

Justifier que la courbe de f est un demi-cercle de centre l'origine du repère. Est-il possible de trouver une fonction dont la courbe soit un cercle entier ?

Exercice n° 9 — Calculette

Soit la fonction f définie sur $[-2~;~3]$ par : $f\left(x\right) = \sqrt{-x^2 + x + 6}$.



1. Vérifier que f est bien définie sur $[-2~;~3]$.
2. À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu le graphique ci-contre.
   - **a.** Conjecturer l'existence du maximum de f.
   - **b.** Démontrer cette conjecture.

Activité 4 — Inversons une fonction !

On considère u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u\left(x\right) = x^2 + 1$ et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f = \dfrac{1}{u}$.

Étude sur $[0~;~+\infty[$

Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.

1. En utilisant le sens de variation de la fonction carré, montrer que $1 \leqslant u(a) < u(b)$.
2. En utilisant le sens de variation de la fonction inverse, comparer $f(a)$ et $f(b)$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $[0~;~+\infty[$.

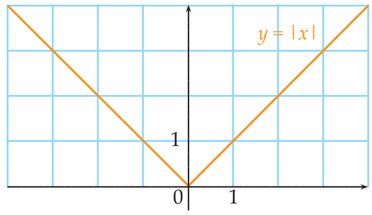
Étude sur $]-\infty~;~0]$

Par un raisonnement analogue, comparer le sens de variation de u et f sur $]-\infty~;0]$.

I Fonction valeur absolue

Définition 1 (Valeur absolue d'un réel)**.** La *valeur absolue* de x, notée $|x|$, est la distance entre x et zéro. Ainsi :

- $|x| = x$ si x est positif ;
- $|x| = -x$ si x est négatif.



Propriété 1. *Si A et B sont deux points d'abscisses respectives a et b sur la droite des réels, alors $AB = |a - b| = |b - a|$.*

II Fonctions $u + k$ et ku

Définition 2 (Fonction $u + k$)**.** Soit u une fonction définie sur un ensemble D et k un réel.
La fonction notée $u + k$ est la fonction définie sur D par $x \longmapsto u(x) + k$.

Propriété 2. *Dans un plan muni d'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, la courbe C_{u+k} est l'image de la courbe C_u par la translation de vecteur $k\vec{\jmath}$.*

Définition 3 (Fonction ku)**.** Soit u une fonction définie sur un ensemble D et k un réel.
La fonction notée ku est la fonction définie sur D par $x \longmapsto k \times u(x)$.

III Sens de variation d'une fonction

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est :

- *croissante* sur I lorsque pour tous les réels a et b dans I : $a < b \implies f(a) \leqslant f(b)$
- *strictement croissante* ________________________ : $a < b \implies f(a) < f(b)$
- *décroissante* ________________________ : $a < b \implies f(a) \geqslant f(b)$
- *strictement décroissante* ________________________ : $a < b \implies f(a) > f(b)$
- *monotone* sur I lorsque f est croissante sur I ou décroissante sur I.

Méthode : Déterminer le sens de variation d'une fonction.

Énoncé : Prouver que la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.
Preuve : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$. Soit a et b dans $[0; +\infty[$ avec $a < b$. On veut comparer $f(a)$ et $f(b)$ pour cela on étudie le signe de leur différence :

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (\underbrace{a + b}_{>0})(\underbrace{a - b}_{<0}) < 0.$$

Comme $a \geqslant 0$ et $b > 0$, on a $(a+b) > 0$. Comme $a < b$, on a $(a-b) < 0$. Ainsi $(a+b)(a-b) < 0$, soit $a^2 - b^2 < 0$ et donc $a^2 < b^2$. On a prouvé que pour tous a et b dans $[0; +\infty[$ on a l'implication : $a < b \implies f(a) < f(b)$. Ainsi f est bien strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété 3. *Soit u une fonction monotone sur un intervalle I et k un nombre réel.*

- *La fonction $u + k$ a le même sens de variation que u sur I.*
- *La fonction ku a le même sens de variation que u sur I si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$.*

IV Fonction racine carrée

Définition 5. La **fonction racine carrée** est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Propriété 4 (R♡C)**.** *La fonction racine carrée est strictement croissante sur* $[0\ ;\ +\infty[$.

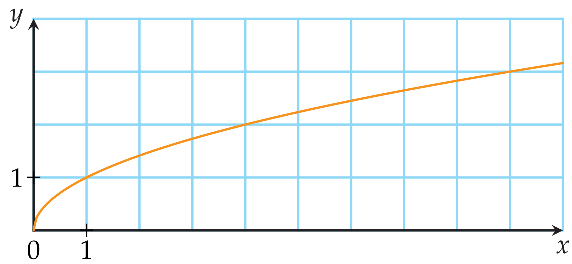
Démonstration. Posons $f(x) = \sqrt{x}$. Soit a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b$.
Comparons $f(a)$ et $f(b)$ en étudiant le signe de leur différence :

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} \overset{\text{(Astuce !)}}{=} \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

$a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$. □

Autres formulations :

- plus x est grand, plus $\sqrt{x}$ est grand.
- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs racines carrées.
- Dans une inégalité avec des nombres positifs, on peut prendre la racine carrée des deux membres sans en changer le sens.

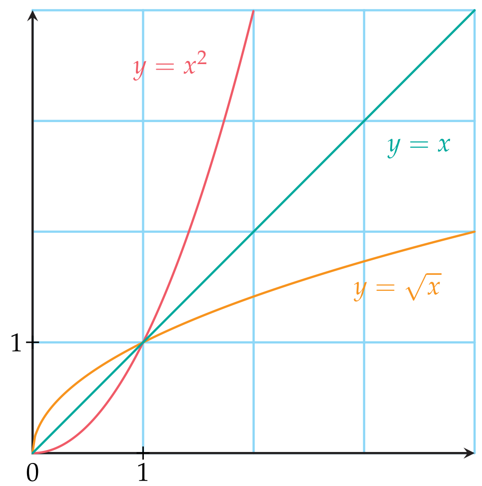


Exemple : Je dis que : $1 < \sqrt{2} < 2$.
Preuve : $1 < 2 < 4$, or la fonction racine est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc : $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$ □

Propriété 5 (Positions relatives de courbes)**.**

- $\forall x \in [0\ ;\ 1]\quad :\quad x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$
- $\forall x \in [1\ ;+\infty[\ :\ \ \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$.

Démonstration.
1^er^ cas : On suppose que $0 \leqslant x \leqslant 1$.
On muliplie chaque membre par x : $\quad x^2 \leqslant x$.
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{1}$ donc $\sqrt{x} \leqslant 1$.
On multiplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $\ x \leqslant \sqrt{x}$
2^nd^ cas : On suppose que $1 \leqslant x$
On muliplie chaque membre par x : $\quad x \leqslant x^2$.
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{1} \leqslant \sqrt{x}$ donc $1 \leqslant \sqrt{x}$.
On muliplie chaque membre par $\sqrt{x}$: $\ \sqrt{x} \leqslant x$.



Propriété 6. *Si u est une fonction monotone et positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ a le même sens de variation que u sur I.*

Démonstration. Dans le cas où u est croissante sur I. Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
u étant croissante sur I, $u(a) < u(b)$. De plus, $u(a) \geqslant 0$ et $u(b) \geqslant 0$ et la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc $\sqrt{u(a)} \leqslant \sqrt{u(b)}$. Ainsi, la fonction $\sqrt{u}$ est croissante sur I.
La démonstration est analogue lorsque u est décroissante sur I. □

Propriété 7. *Pour tout réel x, on a :* $\sqrt{x^2} = |x|$.