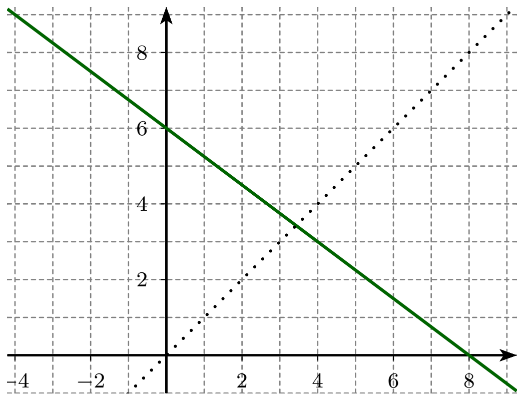
Découverte des suites

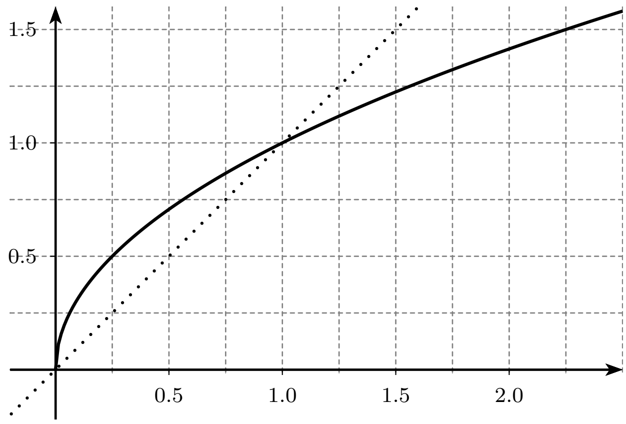
Exercice n° 1 — **Représentation graphique de suites**



Représenter ci-dessus les premiers termes de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = -\dfrac{3}{4}u_n + 6 \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 à la main.
2. Utiliser `-0.75*Ans+6` avec votre calculette pour vérifier.
3. La suite (u_n) est elle croissante ? Décroissante ?
4. Vers quel nombre limite ℓ semble-t-elle tendre ?
5. Déterminer la valeur exacte de ℓ.



Représenter ci-dessus les premiers termes des suites (u_n) et (v_n) définies sur $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,25 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 2,25 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n} \end{cases}$$

1. Comparer les deux suites (u_n) et (v_n). (Sens de variation et limite éventuelle)
2. En utilisant la touche `Ans` (ou `Rép`) de votre calculette, établir une conjecture sur la limite éventuelle et le sens de variation d'une suite vérifiant $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ en fonction du terme initial u_0.
3. Une telle suite peut-elle être constante ? Si oui pour quelle(s) valeur(s) de u_0 ?

Exercice n° 2 — **Étudier une suite définie par récurrence**

Graphiquement

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 6$.

- Déterminer la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Construire la courbe représentant f.
- Construire la droite d'équation $y = x$: elle va servir de «miroir».
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Construire son image u_1.
- Reporter la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite «miroir» d'équation $y = x$.
- Construire de la même façon u_2 puis u_3...

Numériquement

Calculer les termes de u_0 à u_3.

Exercice n° 3

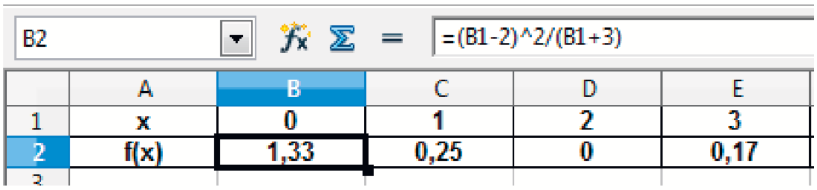
Calculer les quatre premiers termes des suites :

1. $u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$
2. $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2u_n + 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^{n+1} - 3$
4. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

Découverte des suites

Exercice nº 4

Sur la copie d'écran de tableur ci-dessous, on a construit un tableau de valeur d'une fonction f.



1. Quelle est la valeur exacte du nombre contenu dans la cellule B2 ? dans la cellule E2 ?
2. Quelle est l'expression de la fonction f ?
3. Si on calcule les images de tous les entiers de 0 à 20, combien de valeurs a-t-on calculé ?

Exercice nº 5

Soit n un nombre entier naturel. Compléter.

1. $25 \times 5^6 = 5^{\cdots}$
2. $2^n \times 2 = 2^{\cdots}$
3. $(4^n)^3 = 4^{\cdots}$
4. $\dfrac{1}{3} \times 3^n = 3^{\cdots}$

Exercice nº 6

Pour chaque suite (u_n), calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

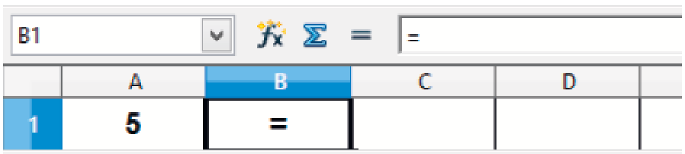
1. $u_n = -7n - 3$.
2. $u_{n+1} = u_n + n + 3$ et $u_0 = -7$.
3. $u_n = 3^n$.
4. $u_n = 3n^2 + 7n + 2$.
5. $u_n = \frac{1}{2^n}$.
6. $u_n = n!$ (où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.)

Exercice nº 7 — TICE

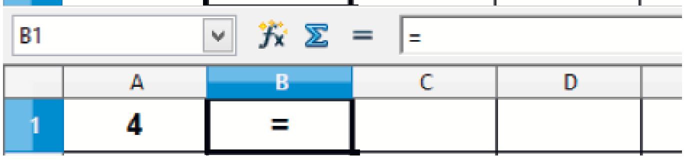
On considère les suites de nombres suivantes :

SUITE A :	5	8	11	14	17	...	
SUITE B :	4	2	1	0,5	0,25	...	
SUITE C :	1	1	2	3	5	8	...

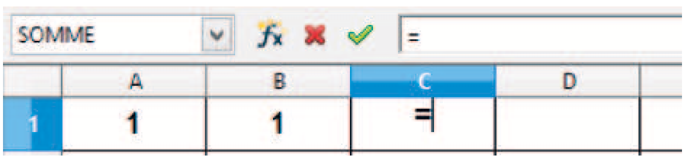
1. Pour chaque suite de nombres, donner les deux nombres suivants.
2. Déterminer le vingtième nombre de chaque suite.
3. On souhaite programmer un tableur pour calculer les termes de ces suites de nombres. Déterminer les formules à saisir dans chaque tableur ci-dessous.
   a. Pour obtenir les termes de la suite A en recopiant la formule entrée en B1 vers la droite.



   b. Pour obtenir les termes de la suite B en recopiant la formule entrée en B1 vers la droite.



   c. Pour obtenir les termes de la suite C en recopiant la formule entrée en C1 vers la droite.



Exercice n° 8 — TICE

On souhaite calculer à l'aide d'un tableur les premiers termes d'une suite v.

C2 =2*B1+1+B2

	A	B	C	D
1	n	1	2	3
2	u_n	-5	-2	

1. En recopiant la formule écrite en C2 vers la droite, quelle valeur obtient-on dans la case D2 ?
2. Définir la suite v.

Exercice n° 9 — TICE

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 + 3u_n. \end{cases}$$

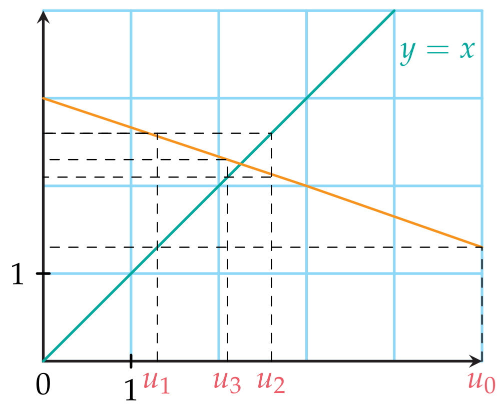
	A	B	C
1	n	0	1
2	u_n		

Que doit-on écrire dans les cellules B2 et C2 pour qu'en étirant vers la droite le contenu de la cellule B2, on obtienne les premiers termes de la suite u ?

Exercice n° 10

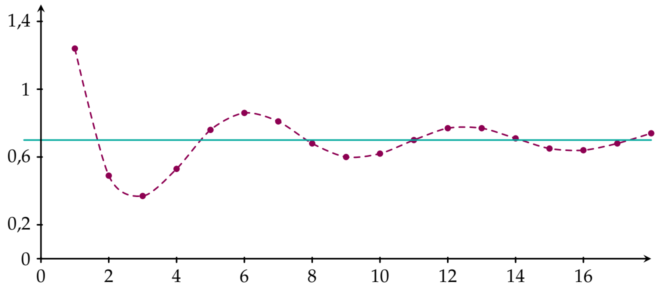
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les premiers termes d'une suite (u_n).

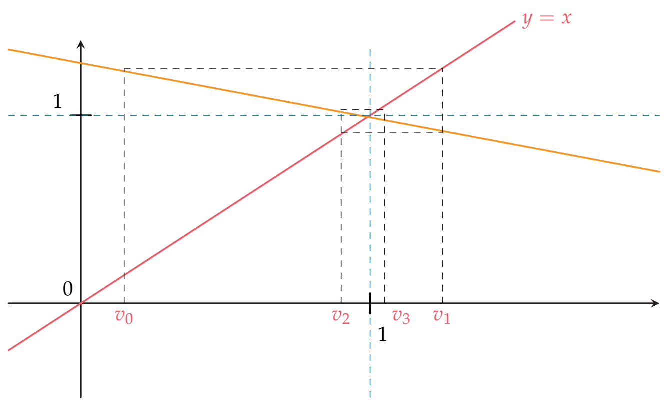
1. Quel est le premier terme de la suite ?
2. Par quelle relation de récurrence est définie (u_n) ?
3. Lire graphiquement la valeur de u_2.
4. Vérifier par le calcul.



Exercice n° 11

Lire graphiquement la limite des suites représentées ci-dessous.





Vocabulaire : Pour une suite u définie sur $\mathbb{N}$, u_0 (« u indice zéro ») est le premier *terme* ou terme de *rang* zéro. Pour un rang n (où n est un entier naturel) u_n est appelé *terme général.* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus court, (u_n) désigne la suite entière.

Une formule qui donne une relation entre un terme et le(s) précédent(s) comme $u_{n+1} = 3u_n - 2$ est appelée *formule de récurrence.* Une formule qui donne directement l'expression de u_n comme $u_n = 3n - 2$ est appelée *formule explicite.*

Attention ! Il faut bien écrire les indices pour ne pas confondre u_{n+1} et $u_n + 1$.

Sens de variation : Si tous les termes d'une suite u sont de plus en plus grands (resp. petits) on dit qu'elle est croissante (resp. décroissante). Formellement cela s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$.

On dit qu'une suite est *monotone* lorsqu'elle est croissante ou qu'elle est décroissante.

Méthode : Pour prouver qu'une suite est croissante (ou décroissante) il suffit de prouver que la différence $u_{n+1} - u_n$ est toujours positive (resp. négative) quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Convergence, divergence. Quand une suite (u_n) tend vers une valeur limite ℓ (où ℓ est un nombre réel, pas l'infini) lorsque n tend vers l'infini, on dit que la suite *converge* vers ℓ. On note cela ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Si la suite n'a pas de limite finie (en particulier si elle tend vers $+\infty$ ou $-\infty$), on dit qu'elle *diverge.*

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc la suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers zéro.

$(-1)^n$ vaut alternativement 1 puis -1 selon la parité de n, donc cette suite ne converge pas, elle n'a pas de limite, elle diverge.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ donc la suite de terme général $-n^2$ diverge vers $-\infty$.

Représentation graphique. Vous devez savoir représenter sur un graphique où on donne la courbe d'une fonction f les termes de la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et de la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour celà on place u_0 sur l'axe des abscisses, on trace la droite $y = x$ qu'on utilise pour rabattre $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des abscisses et recommencer pour les termes suivants.