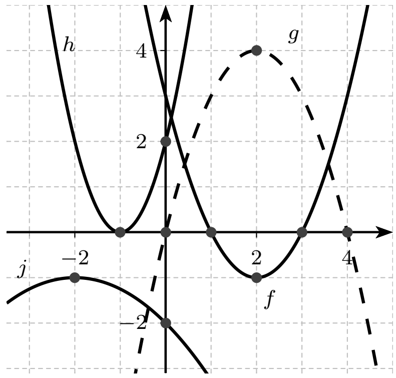



**Activité 1** FONCTION MYSTÈRE.

Sur le graphique ci-contre sont tracées quatre paraboles qui représentent dans ce repère orthonormé quatre fonctions $f$, $g$, $h$ et $j$. Déterminer pour chacune d'elle son expression sachant que les points placés sont à coordonnées entières.
On pourra utiliser la forme développée ou canonique ou factorisée selon ce qui semble le plus simple dans chaque cas.

**Exercice n° 1**

On souhaite résoudre l'équation du second degré : $2x^2 - 8x - 1 = 0$.

1. Recopier et compléter les égalités successives :
   $2x^2 - 8x = 2[x^2 - \dots] = 2[(x - \dots)^2 - \dots] = 2(x - \dots)^2 - \dots$
   $2x^2 - 8x - 1 = 2(x - \dots)^2 - \dots$
2. En déduire que l'équation $2x^2 - 8x - 1 = 0$ est équivalente à $(x-2)^2 = \dfrac{9}{2}$.
3. En déduire la résolution de l'équation : $2x^2 - 8x - 1 = 0$.
4. Résoudre de la même façon l'équation : $-x^2 + 3x + 2 = 0$.

**Exercice n° 2** — **Forme canonique**

Mettre sous forme canonique les polynômes du second degré suivants.

1. $x^2 + 4x + 1$
2. $4x^2 - 3$
3. $-2x^2 + 3x - 6$
4. $x^2 + 6x$

**Exercice n° 3** — **Preuve**

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. On veut prouver qu'il est toujours possible de mettre un tel polynôme du second degré sous forme canonique c'est à dire qu'il existe $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $x$ réel : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

1. Méthode n° 1. Développer la forme canonique et identifier les valeurs à attribuer à $\alpha$ et $\beta$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.
2. Méthode n° 2. Appliquer la méthode vue en pratique à partir de la forme développée :
   **a.** $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \dots\right] + c$
   **b.** $f(x) = a\left[(x + \dots)^2 - \dots\right] + c$
   **c.** $f(x) = a\left(x + \dots\right)^2 + \dots$
   **d.** Il faut et il suffit de prendre $\alpha = \dots$ et $\beta = \dots$.

**Exercice n° 4** — $\boxed{\texttt{TICE}}$

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Écrire un algorithme permettant de calculer $\alpha$ et $\beta$ connaissant $a$, $b$ et $c$.

**Exercice n° 5**

Étudier les variations de chacune des fonctions du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1. $f_1(x) = (x-1)^2 + 10$
2. $f_2(x) = -2(x-5)^2 + 2$
3. $f_3(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{3}$
4. $f_4(x) = -2(x+3)^2 - 5$

**Exercice n° 6**

Étudier les variations de chacune des fonctions du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1. $f_1(x) = x^2 - x + 1$
2. $f_2(x) = -\dfrac{1}{2}(x-5)(x+3)$
3. $f_3(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{4}{3}$
4. $f_4(x) = 3x^2 - 6x + 3$

**Exercice n° 7**

Le nombre $a$ est-il racine du trinôme $P(x)$ ?

1. $a = 1$ et $P(x) = 8x^2 - 7x - 1$
2. $a = 0$ et $P(x) = -x^2 + 2x - 1$
3. $a = -2$ et $P(x) = x^2 - 2x - 4$
4. $a = 2$ et $P(x) = x^2 + x + 2$

**Exercice n° 8**

Déterminer les racines des trinômes suivants.

1. $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$
2. $x^2 - 4x + 4$
3. $4 + 5x - x^2$
4. $4x^2 + 3$

**Exercice n° 9** TICE

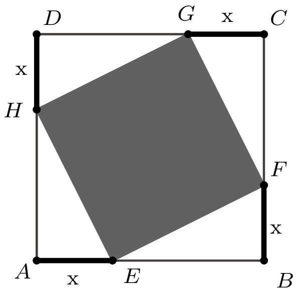
Reprendre l'exercice précédent après avoir programmé la calculatrice (algorithme du second degré) ou en utilisant la fonction disponible.

**Exercice n° 10**

Établir le tableau de signe de chaque trinôme puis résoudre les inéquations du second degré suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2 + x - 2 > 0$
2. $-3x^2 + x - 2 \leqslant 0$
3. $2x^2 + 3x \geqslant 0$
4. $2x^2 - 8 < 0$

### Exercice n° 11



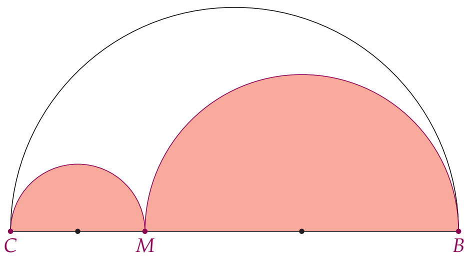

$ABCD$ est un carré de côté 1. On a créé $EFGH$ en plaçant ses sommets à une distance $x$ de chaque sommet de $ABCD$ comme sur la figure.

**1.** Déterminer la valeur de $x$ qui rend l'aire de $EFGH$ minimale.

**2.** Pour quelles valeurs de $x$ l'aire de $EFGH$ est elle inférieure à 75% de l'aire de $ABCD$ ?

### Exercice n° 12 — Un logo

Un designer doit réaliser un logo pour une entreprise. Il veut créer la partie blanche de la figure ci-dessous, située à l'intérieur du demi-disque de diamètre $[BC]$ et à l'extérieur des demi-disques de diamètre $[CM]$ et $[MB]$ où $M$ est un point quelconque du segment $[BC]$.
On a $BC = 10$ cm et on pose $x = CM$.
Le designer doit faire en sorte que l'aire de la partie blanche soit égale à la moitié de l'aire du demi-disque de diamètre $[BC]$.
Comment doit-il positionner le point $M$ ?




### Exercice n° 13 — Drapeau suédois

On peut assimiler le drapeau suédois à un rectangle de côtés de longueur 8 et de largeur 5 composé d'une croix jaune sur fond bleu. On sait que l'aire de la croix jaune est égale aux trois dixièmes de l'aire totale du drapeau. Les deux bandes jaunes qui se croisent possèdent la même largeur, à vous de la déterminer.

**Définition :** On appelle *fonction polynôme du second degré* toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ ayant une expression pouvant être mise sous la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ $c \in \mathbb{R}$

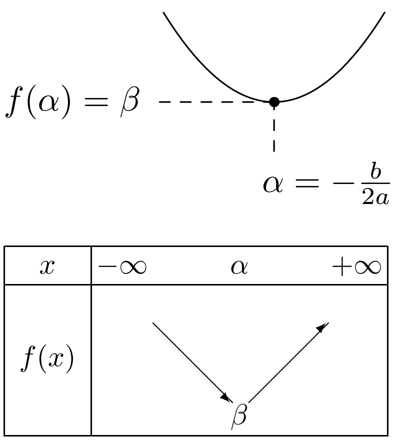
| *forme développée* | *forme canonique* | *forme factorisée* (n'existe pas toujours) |
|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c$ | $a(x-\alpha)^2 + \beta$ | $a(x-x_1)(x-x_2)$ ou $a(x-x_1)^2$ |

## Méthode de transformation. Forme développée → Forme canonique.

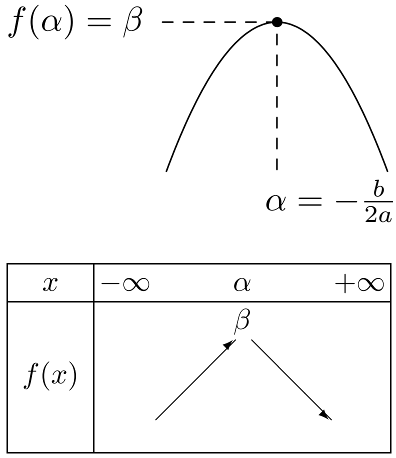
1. On part de la forme développée. Disons qu'on prenne l'exemple suivant : $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$
2. On factorise les termes en $x$ par $a$. Ici $a = -2$. $f(x) = -2[\mathbf{x^2 - 2x}] + 6$
3. On doit reconnaitre dans les termes en $x^2$ et $x$ le *début du développement d'un carré* de la forme $(x-\alpha)^2$. Ici on regarde donc $x^2 - 2x$ qui est le début du développement de $(x-1)^2$. En effet $(x-1)^2 = \mathbf{x^2} - \mathbf{2x} + 1^2$. On retranche le carré $1^2$ qu'on ne veut pas et on peut donc remplacer $x^2 - 2x$ par $(x-1)^2 - 1$. $f(x) = -2[(\mathbf{x-1})^\mathbf{2} - \mathbf{1}] + 6$
4. Il ne reste plus qu'à distribuer $a = -2$ sur les deux termes entre crochets. $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$

## L'essentiel pour étudier $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$

si $\boxed{a > 0}$




si $\boxed{a < 0}$




## Méthode de transformation. Forme canonique → Forme factorisée.

5. On part de la forme canonique, on factorise par $a$ : $f(x) = -2[(x-1)^2 - 4]$
6. Ici on reconnait dans le crochet la différence de deux carrés $A^2 - B^2$ $f(x) = -2[(x-1)^2 - \mathbf{2}^2]$
7. On utilise l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ : $f(x) = -2[(x-1-\mathbf{2})(x-1+\mathbf{2})]$
8. On retire les crochets inutiles et on simplifie dans les parenthèses. $f(x) = -2(x-3)(x+1)$

## Méthode de résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

- On calcule le discriminant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$
  - Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.
  - Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une unique solution réelle, dite racine double : $\boxed{x_0 = -\dfrac{b}{2a}}$
  - Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux réels distincts solution notés $x_1$ et $x_2$ avec les formules :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$