Activité 1 Bien réussir un QCM `TICE`

Dolorès s'est inscrite à un concours pour entrer en école d'ingénieur.

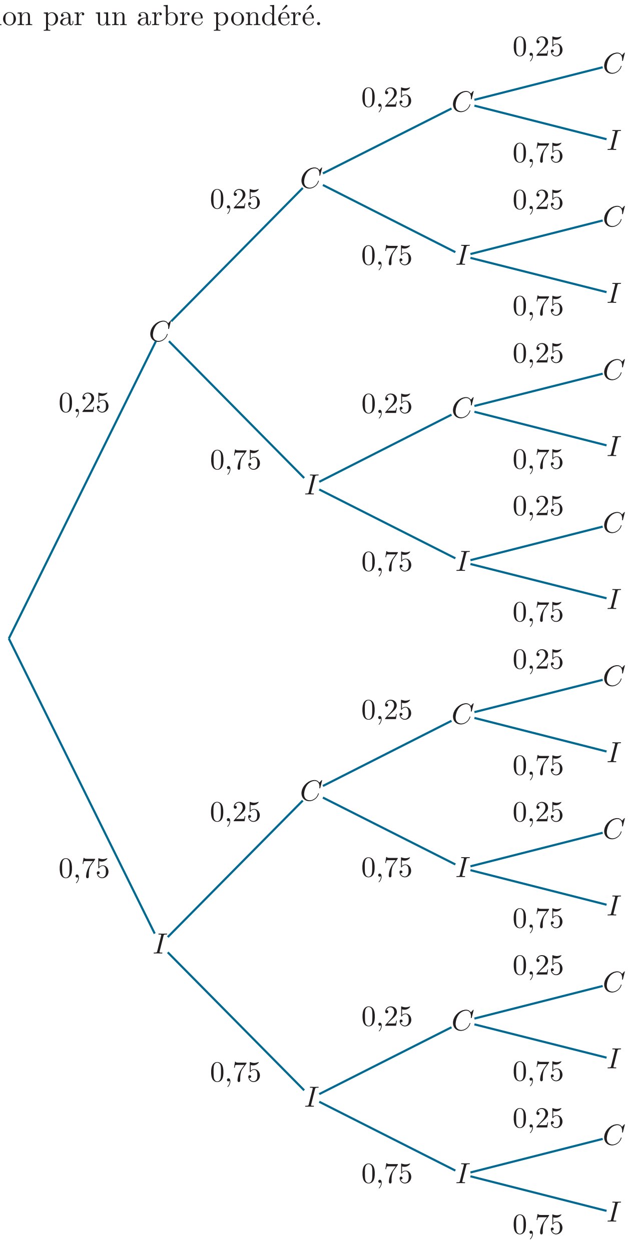
Celui-ci se présente sous la forme d'un QCM où, pour chaque question, il faut dire laquelle des quatre propositions est vraie.

Partie A. *Hors programme*
Comme le concours a lieu en cours d'année, quatre questions portent sur des parties du programme qu'elle n'a pas vues en classe, elle décide donc d'y répondre au hasard. Pour chaque question, on appelle :

- C l'événement : « la réponse est correcte »
- I l'événement : « la réponse est incorrecte »

Dans toute l'activité, les probabilités seront données **sous forme décimale, arrondies à 0,0001 près.**

1. On a représenté la situation par un arbre pondéré.



Expliquer les pondérations $0,25$ et $0,75$.

2. a. Combien y a-t-il de chemins correspondant à trois réponses correctes ?

b. Dans chacun de ces chemins, combien y a-t-il de pondérations $0,25$ et $0,75$?

c. En déduire la probabilité que Dolorès ait exactement trois réponses correctes.

3. a. Sans regarder l'arbre, dire combien il y a de pondérations $0,25$ et $0,75$ dans un chemin correspondant à deux réponses correctes.

b. On peut obtenir le nombre de chemins correspondant à deux réponses correctes (dans cette expérience à quatre étapes) avec la calculatrice, sans regarder l'arbre.

Pour cela, on saisit :

Calculatrice TI

$\boxed{\text{4 Combinaison 2}}$

où `combinaison` s'obtient en :

- appuyant sur la touche $\boxed{\text{MATH}}$
- choisissant $\boxed{\text{PRB}}$
- choisissant $\boxed{\text{3 :Combinaison}}$

Calculatrice CASIO

$\boxed{4\mathbf{C}2}$

où `C` s'obtient en :

- appuyant sur la touche $\boxed{\text{OPTN}}$
- choisissant ▷ puis $\boxed{\text{PROB}}$
- choisissant $\boxed{\text{nCr}}$

Vérifier le résultat obtenu sur l'arbre.

c. En déduire la probabilité que Dolorès ait exactement deux réponses correctes.

4. a. À l'aide de la calculatrice, donner le nombre de chemins correspondant à exactement une réponse correcte.

b. Combien y a-t-il de pondérations $0,25$ et $0,75$ sur chacun de ces chemins ?

c. En déduire la probabilité que Dolorès ait exactement une réponse correcte.

5. Déterminer la probabilité que Dolorès ait exactement :

- 0 réponse correcte
- 4 réponses correctes

6. Reproduire et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de réponses correctes à ces quatre questions.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$					

Partie B. *Avec six questions*

1. En lisant le reste des questions, Dolorès s'aperçoit qu'il y en a deux autres dont elle ne connaît pas la réponse (c'est-à-dire six en tout).

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y donnant le nombre de réponses correctes si elle décide de répondre au hasard à ces six questions.

2. La règle dans ce QCM est :

- chaque réponse correcte rapporte 1 point ;
- chaque réponse incorrecte enlève 0,5 point ;
- une absence de réponse n'ajoute et n'enlève aucun point.

a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire Z donnant le gain algébrique de points pour ces six questions.

b. En déduire le nombre de points que Dolorès peut « espérer gagner ».

c. Sachant que Dolorès est certaine d'avoir répondu correctement aux quatorze autres questions, doit-elle plutôt faire le choix de ne pas répondre à ces six questions ? Argumenter.

Exercice n° 1

Chaque matin, Alain passe à la boulangerie.

Une fois sur cinq, il prend deux pains au chocolat et, le reste du temps, il en prend un seul.

1. On étudie le nombre de viennoiseries qu'Alain a pris ce matin. Expliquer pourquoi on est dans la situation d'une épreuve de Bernoulli.

2. Alain paie toujours avec une pièce de 2 €.

On note X la variable aléatoire donnant la somme d'argent qui lui est rendue ce matin.

Quelle loi suit X sachant qu'un pain au chocolat coûte 1 € ?

Exercice n° 2

Chaque jour, Natacha et Ben tirent au sort pour savoir qui va faire la vaisselle.

Pour cela, ils lancent une pièce :

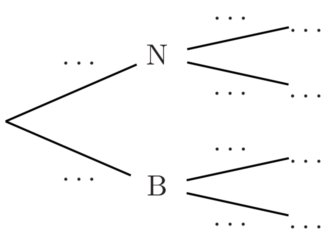
- si le résultat est « Pile », Natacha fait la vaisselle ;
- sinon, c'est Ben qui fait la vaisselle.

Natacha a fourni la pièce en question : cette dernière a une probabilité de $\dfrac{2}{3}$ de tomber sur « Face ».

On s'intéresse à la répartition des tours de vaisselle durant quatre jours.

1. Expliquer pourquoi l'on peut considérer que chaque lancer de pièce est indépendant du précédent.

2. On a tracé le début de l'arbre représentant la situation ci-dessous. Le recopier et le compléter pour qu'il représente la situation sur les quatre jours.



3. Déterminer la probabilité que seule Natacha ait fait la vaisselle durant ces quatre jours.

4. Déterminer la probabilité qu'il y ait eu une juste répartition des tâches durant ces quatre jours.

Exercice n° 3

Répondre aux questions sans calculatrice.

1. Donner $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$.

2. On donne $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 84$ et $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = 36$.

Donner $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

puis déterminer $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 4

X suit $\mathscr{B}(6\ ;\ 0,4)$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, les probabilités suivantes :

1. $P(X = 2)$

2. $P(X = 0)$

3. $P(X \leqslant 4)$

4. $P(X \leqslant 6)$

5. $P(X > 3)$

6. $P(X \geqslant 5)$

Exercice n° 5

Y suit une loi binomiale avec $P(Y \leqslant 15) = 0,65$ et $P(Y \leqslant 19) = 0,875$. Déterminer :

1. $P(Y > 15)$

2. $P(16 \leqslant Y \leqslant 19)$

Exercice n° 6

Z suit la loi $\mathscr{B}(150\ ;\ 0,35)$. Déterminer :

1. $P(X = 50)$

2. $P(30 \leqslant X \leqslant 50)$

3. $P(X > 40)$

4. $P(X \leqslant 50)$

Exercice n° 7

1. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(4\ ;\ 0,3)$.

a. Tabuler $k \mapsto P(Z = k)$ sur la calculatrice.

b. Construire un diagramme en bâtons représentant la loi de probabilité de Z.

2. Représenter graphiquement la loi $\mathscr{B}(6\ ;\ 0,7)$.

Exercice n° 8

Lamine joue aux échecs contre un ordinateur et la probabilité qu'il gagne une partie est $0,65$.

Il décide de jouer sept parties contre l'ordinateur.

On suppose que le résultat de chaque partie est indépendant des autres.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties qu'il gagne contre l'ordinateur sur les sept.

1. a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres n et p.

b. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement trois parties ?

c. Quelle est la probabilité qu'il gagne plus de la moitié des parties ?

2. Il décide de changer le niveau de difficulté en « expert » et la probabilité qu'il gagne une partie contre l'ordinateur devient $0,05$.

Il décide de jouer à nouveau une série de sept parties contre l'ordinateur. Quelle est la probabilité qu'il en gagne au moins une ?

Exercice n° 9

Une usine produit des grille-pain, certains étant défectueux, et on suppose que la probabilité qu'un grille-pain soit défectueux est égale à $0,03$.

On prélève au hasard un échantillon de 100 grille-pain dans la production d'une journée et on admet que cette production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 grille-pain.

On considère la variable aléatoire X qui, à ce prélèvement de 100 grille-pain, associe le nombre de grille-pain défectueux.

Tous les résultats seront arrondis au centième.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait 96 grille-pain en bon état dans ce prélèvement ?

3. Quelle est la probabilité de l'événement « au moins trois grille-pain sont défectueux » ?

4. a. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

b. Calculer $P(X \leqslant E(X))$.

Exercice n° 10

Une tombola est organisée dans une école.

La directrice de l'école affirme qu'un billet sur trois est gagnant.

1. Bob a acheté quatre billets et il annonce qu'il est sûr de gagner.

On admet que l'achat de ces quatre billets est assimilable à un tirage avec remise et on note X le nombre de billets gagnants parmi les quatre.

a. Déterminer la probabilité que ses quatre billets soient gagnants.

b. Déterminer la probabilité qu'aucun de ses billets ne soit gagnant.

2. Combien de parties peut-il espérer gagner ?

Exercice n° 11

Quand il tire du milieu de terrain de basket, Joe marque le panier avec une probabilité de $0,1$.

Il tente sa chance n fois de suite du milieu de terrain et on suppose que les lancers sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis.

1. Quelle loi suit X ?

2. Déterminer la probabilité que Joe réussisse exactement deux lancers en fonction de n et $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer la probabilité que Joe réussisse au moins un lancer en fonction de n.

4. On considère l'algorithme suivant, écrit à l'aide d'Algobox.

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 0
  p PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (p<0.5) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    p PREND_LA_VALEUR 1-pow(0.9,n)
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Rappel : `pow(0.9,n)` signifie $0,9^n$.

a. Que fait cet algorithme ?

b. Déterminer avec la calculatrice quelle valeur est renvoyée par l'algorithme.

5. Joe souhaite connaître le nombre n de lancers à effectuer pour que la probabilité qu'il réussisse au moins un panier soit supérieure à 0,95.

Modifier l'algorithme précédent pour qu'il renvoie le nombre n de lancers qu'il devra tenter.

Exercice n° 12

Reprendre le triangle de Pascal.

1. a. Lire $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ dans le tableau.

b. Déterminer

$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Démontrer que si n et k sont deux entiers tels que $k \leqslant n-2$, alors :

$$\begin{pmatrix} n+2 \\ k+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+2 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 13

Un ascenseur tombe en panne avec une probabilité de $0,015$ chaque jour et une réparation coûte 500 euros.

On suppose que la panne (ou non) de l'ascenseur est indépendante de celles des jours précédents.

1. Quelle est la probabilité que l'ascenseur tombe exactement une fois en panne durant le mois de janvier ?

2. En moyenne, combien peut-on prévoir de dépenses de réparation pour une année ?

Propriété 1. Deux règles d'utilisation des arbres pondérés :
- la probabilité d'une « feuille » (*événement élémentaire*) est le produit des probabilités inscrites sur les branches qui mènent à la feuille ;
- la probabilité d'un événement regroupant plusieurs feuilles est la somme des probabilités de chacune des feuilles.

Définition 1. Une expérience aléatoire à deux issues est une **épreuve de Bernoulli**. Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée **succès** (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

Issue	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1-p$

La variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre p**.

Définition 2. On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Définition 3. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.
L'entier $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, appelé **coefficient binomial** et se lisant « k parmi n », désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès.

Définition 4. Le tableau suivant donnant tous les coefficients binomiaux est appelé « **Triangle de Pascal** ».

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							

- Comme $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$, il y a des 1 dans la première colonne et la diagonale.
- Comme $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$, on peut remplir chaque ligne à partir de la précédente, par exemple, on a $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $6 + 4 = 10$.
- On observe sur ce triangle que $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$.

Propriété 2. Soit n et k des entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.
$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1\,;\ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1\,;\ \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$

Définition 5. On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la **loi binomiale de paramètres n et p**, notée $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

Propriété 3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$. On a : $P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$.