1 Résolution historique

Au XVI^e siècle les algébristes italiens apprennent à résoudre les équations du troisième degré, en les ramenant à des équations du deuxième degré dont la résolution est connue depuis le IX^e siècle grâce auxs mathématiciens arabes. On attribue à CARDAN[1] (Girolamo Cardano : Pavie 1501-Rome 1576) la formule (2) donnant une solution à l'équation du troisième degré d'inconnue x :

$$x^3 = px + q \tag{1}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{2}$$

Définition : Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\sqrt[3]{a}$ appelé *racine cubique de* a l'unique réel x vérifiant $x^3 = a$.

La racine cubique, contrairement à la racine carrée est définie pour tout réel car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et varie de $-\infty$ à $+\infty$. Par exemple, $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

Toute équation de degré trois peut se mettre sous la forme $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ quitte à diviser par le coefficient de x^3. On pourra vérifier que toute équation de cette forme peut se mettre sous la forme de l'équation (1) à l'aide du changement de variable : $x = X - \frac{b}{3}$ qui permet de se débarrasser du terme en x^2.

1. Voyons sur un exemple comment ils trouvèrent la formule improbable (2). On considère l'équation :

$$x^3 = 6x + 20 \tag{3}$$

2. On pose $x = u + v$. Prouver que l'équation (3) devient : $u^3 + v^3 + (3uv - 6)(u + v) = 20$.

3. Quelle valeur suffit-il d'imposer au produit uv pour que (3) s'écrive $u^3 + v^3 = 20$?

4. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. Alors, U et V sont deux réels dont on connait la somme S et le produit P. Combien valent S et P ? Déterminer U et V.

5. En déduire qu'une solution de (3) est :

$$\sqrt[3]{10 + 2\sqrt{23}} + \sqrt[3]{10 - 2\sqrt{23}}$$

6. On pourra étudier $x \mapsto x^3 - 6x - 20$ sur $\mathbb{R}$ pour voir qu'il n'y a qu'une solution à l'équation (3).

La méthode de TARTAGLIA-CARDAN conduit cependant, dans certains cas, à un paradoxe que BOMBELLI(1526-1572) va essayer de surmonter. Il publie en 1572 dans son *l'Algebra opera* l'exemple suivant :

2 Des nombres impossibles

On considère l'équation :

$$x^3 = 15x + 4 \tag{4}$$

1. Vérifier que $x = 4$ est une solution de cette équation (4).

2. Appliquer sans réfléchir la formule (2) pour cette équation. Voyez vous le problème ?
L'idée et l'audace de BOMBELLI (qui boulversa les mathématiques) est de faire comme si -121 était le carré d'un nombre imaginaire[2] qui s'écrirait : $11\sqrt{-1}$. Il reconnait en $(2 - 11\sqrt{-1})$ et en $(2 + 11\sqrt{-1})$ des cubes :

3. Développer $(2 + \mathrm{i})^3$ et $(2 - \mathrm{i})^3$ en tenant compte de $\mathrm{i}^2 = -1$.

4. Comme BOMBELLI, retrouvez alors en appliquant la formule (2) la solution réelle 4.

Ce nombre « $\sqrt{-1}$ » qualifié d'impossible va susciter beaucoup de méfiance et de polémiques pendant deux siècles jusqu'à ARGAND en 1806 qui proposera une représentation géométrique de ces nombres imaginaires (de la forme $a + \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) et GAUSS(1777-1855) qui les nommera **Nombres complexes**.

[1] En fait, TARTAGLIA (Niccolò Tartaglia : Brescia 1500 - Venise 1557) autodidacte aurait découvert la formule en 1539 et l'aurait exposée au professeur respecté CARDAN qui l'a publié dans son *Ars magna* en 1545 comme étant sa propre découverte...

[2] BOMBELLI appella $\sqrt{-1}$ *piu di meno* qui sera noté i plus tard par EULER(1734-1810) en 1777.