Surplomb maximal

Vincent PANTALONI

27 novembre 2010

1 Le problème

On s'intéresse ici à un problème que nous sommes beaucoup à nous être posé, en jouant à empiler des cartes, des dominos, des morceaux de sucre, des Kapla, voire des briques :
Quelle est le plus long surplomb que l'on peut former en empilant des briques en équilibre les unes sur les autres ? Comment s'y prendre ?
Celui qui a déjà essayé a pu être convaincu que l'on ne peut guère dépasser une unité de longueur tellement la tâche semble délicate en pratique. Ci-dessous un essai avec quatre briques où le surplomb mesure un peu moins d'une unité (longueur d'une brique) : Le résultat que l'on va montrer est surprenant :

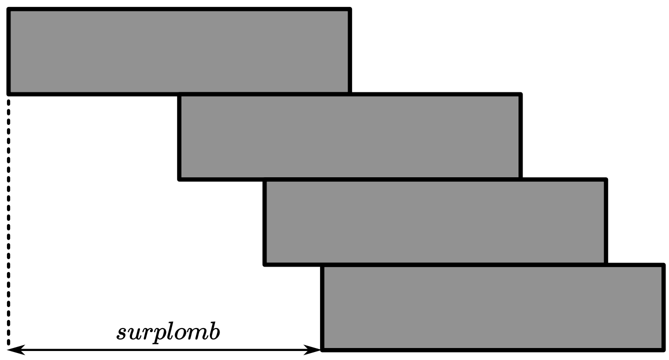


FIGURE 1 – Surplomb avec quatre briques

On peut obtenir un surplomb aussi long que l'on veut.
Autrement dit la longueur du surplomb tend vers l'infini lorsque le nombre n de briques posées tend vers l'infini.

2 Résolution

Il s'agit d'un problème qui se traite en utilisant la notion mathématique de barycentre qui correspond à ce que les physiciens appellent aussi centre de masse, centre de gravité ou centre d'inertie. On prendra des briques de longueur unitaire (de longueur égale à 1) et ni leur épaisseur ni leur profondeur ne rentre en jeu.
Avec deux briques, le surplomb le plus long que l'on puisse obtenir est évidemment de $\frac{1}{2}$ en posant les deux briques ainsi :

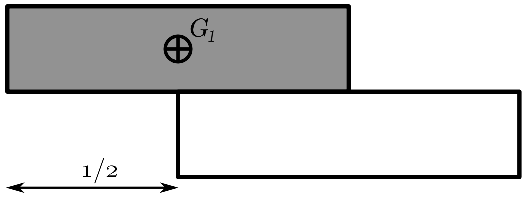


Figure 2 – Surplomb avec deux briques

G_1 désigne le centre de gravité de la brique grise, qui se trouve au centre du rectangle. La condition nécessaire et suffisante pour que la brique grise tienne sur la brique du dessous, est que G_1 se trouve à la verticale d'un point de la brique du dessous. C'est cette propriété essentielle que nous utiliserons dans la suite. Ainsi pour obtenir le plus long surplomb avec deux briques, on place G_1 à la verticale du bord de la brique du dessous.
Si on veut alors poser une 3^e^ brique par dessus, on ne pourra pas augmenter le surplomb car alors les deux briques du haut basculeraient sur l'arête de celle du bas. La bonne idée est en fait de mettre les briques par en dessous de ce groupe stable de deux briques. Pour cela on doit déterminer le barycentre de ce groupe de deux briques, on le note G_2. En notant G'_2 le barycentre de la brique blanche, il semble évident que G_2 sera le milieu du segment joignant G_1 et G'_2. Tout se passe comme si on cherchait le point d'équilibre des points G_1 et G'_2 chacun étant affecté de la même masse : celle d'une brique.

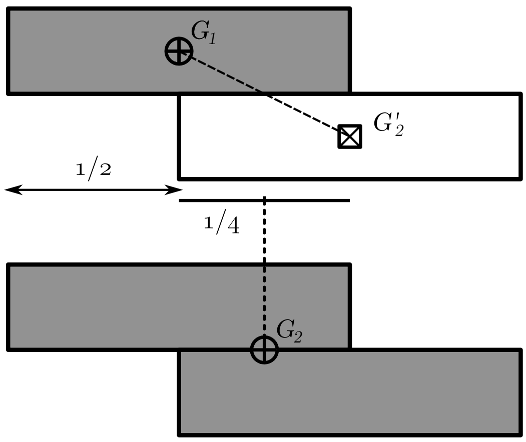


Figure 3 – Barycentre d'un système de deux briques

Ainsi on peut poser ces deux briques sur une troisième brique dont le coin sera à la verticale de G_2. Le surplomb mesurera alors $\frac{1}{2}$ plus la moitié d'une demi brique c'est à dire $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. On va continuer ainsi de suite à empiler des briques par en dessous en généralisant nos notations comme le montre la figure suivante :

Notons G_n le barycentre du système formé des n premières briques posées (grisées sur la figure), et G'_{n+1} le barycentre de la $n+1$ ième en blanc que l'on ajoute en dessous du système de n briques. On notera aussi x_n l'abscisse de G_n et x'_n celle de G'_n en prenant comme origine la verticale de la première brique. Ainsi :

$$x_1 = \frac{1}{2};\ x'_2 = 1;\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Donc x_n représente le surplomb obtenu avec $n+1$ briques. Expliquons d'abord d'où vient le $1/6$ sur la figure ci contre. G_3 est le barycentre de G_2 et G'_3, mais G_2 compte pour deux briques et G'_3 pour une brique, ainsi le point d'équilibre sera plus près de G_2 que de G'_3. Plus précisément, comme les masses sont dans le ratio 2 :1, avec une masse totale de 3, G_3 sera à un tiers du segment $[G_2G'_3]$ en partant de G_2. Il en sera de même pour l'abscisse de G_3 qui sera à un tiers d'une demi brique (soit $1/6$) à droite de la verticale de G_2. Cela se formalise par un calcul de x_3 qui est une moyenne pondérée par 2 et 1 des nombres x_2 et x'_3 :

$$x_3 = \frac{2x_2 + x'_3}{2+1}$$

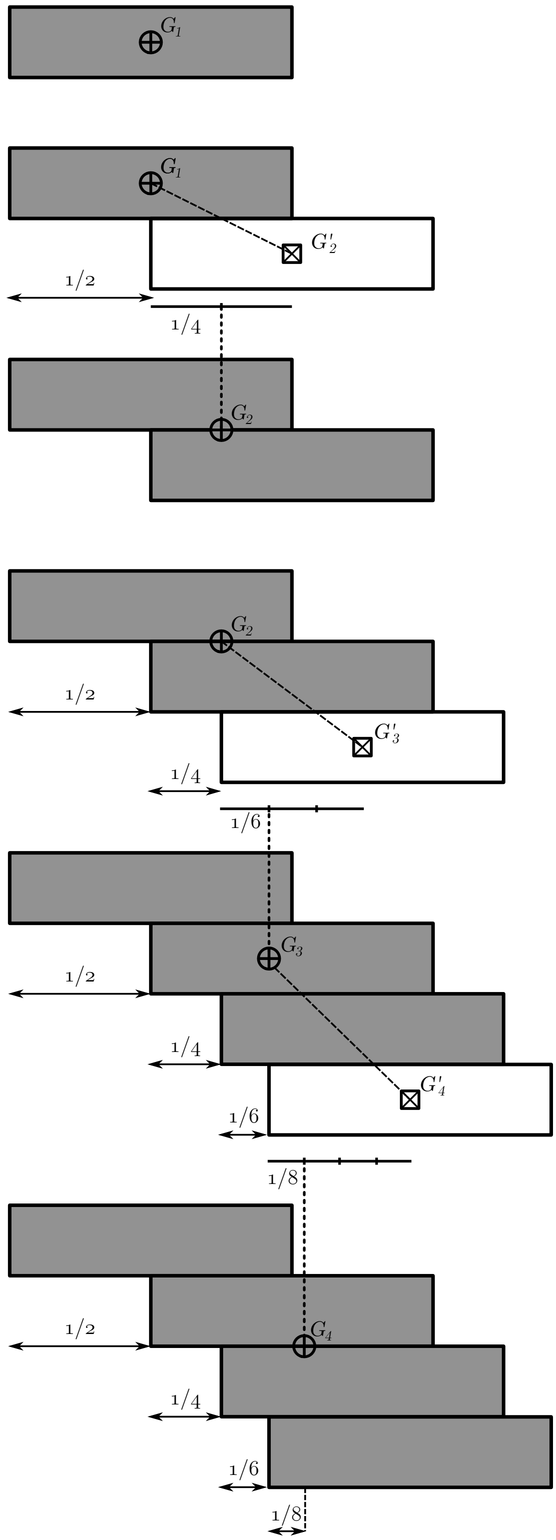
Comme G'_{n+1} se trouve au centre de la $n+1$ ième brique on a pour tout n :

$$x'_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}$$

Ce qui donne pour x_3 :

$$x_3 = \frac{2x_2 + x_2 + \frac{1}{2}}{3} = x_2 + \frac{1}{6}$$

Ainsi : $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.



Généralisons le calcul précédent. Les abscisses des barycentres vérifient une propriété de moyenne pondérée : x_{n+1} est la moyenne de x_n pondéré de la masse n (car G_n est le barycentre d'un système de n briques) et de x'_{n+1} pondéré par la masse 1 car G'_{n+1} est le barycentre d'une brique.

$$x_{n+1} = \frac{n \times x_n + x'_{n+1}}{n+1}$$

En remplaçant x'_{n+1} par $x_n + \frac{1}{2}$ on a alors :

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left(n \times x_n + x_n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{n+1} \\
&= \left((n+1) \times x_n + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{(n+1) \times x_n}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \\
&= x_n + \frac{1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Ceci pour tout n à partir de 1. De proche en proche on a donc :

$$x_4 = x_3 + \frac{1}{2 \times 4} = x_2 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} = x_1 + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4}$$

Ainsi : $x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{2\times 4} \approx 1,041$ donc avec 5 briques on peut avoir un surplomb supérieur à 1 comme on le voit sur la figure précédente. Plus généralement :

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{2 \times n}$$

Ce qu'on peut factoriser par $\frac{1}{2}$ et donc :

$$\boxed{x_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}$$

Il n'existe pas de formule pour calculer cette somme des inverses, appelée somme harmonique, mais on sait qu'elle tend (très lentement) vers l'infini avec n. On sait même qu'elle est équivalente au logarithme népérien de n, noté $\ln(n)$. Et plus précisément la différence entre la somme harmonique et $\ln(n)$ tend vers une constante notée γ et appelée constante d'Euler. On a $\gamma \approx 0,58$. Pour n très grand on a donc l'approximation suivante de x_n :

$$\boxed{x_n \approx \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \gamma\right)}$$

On peut en déduire par exemple que pour avoir un surplomb qui dépasse 2 il faut 31 briques. Pour un surplomb plus grand que 3, il faut 227 briques, et pour un surplomb de plus de 10, il faut 272 400 600 briques ! Si on connait les propriétés du logarithme népérien, on peut aussi calculer combien il faut de briques en plus pour augmenter le porte-à-faux d'une unité : Soit n un entier assez grand, on cherche l'entier p supérieur à n tel que $x_p - x_n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} x_p - x_n \approx & \frac{1}{2}\left(\ln(p) + \gamma\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(n) + \gamma\right) \\ = & \frac{1}{2}\left(\ln(p) - \ln(n)\right) \\ = & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{n}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $x_p - x_n \geqslant 1$ revient à $\ln\left(\frac{p}{n}\right) \geqslant 2$ ce qui donne $\frac{p}{n} \geqslant \mathrm{e}^2$ autrement dit $p \geqslant \mathrm{e}^2\, n$.
Ainsi :
Il faut (en gros) multiplier par $\mathrm{e}^2 \approx 7,4$ le nombre de briques déja posées pour augmenter d'une unité le surplomb déjà créé.
Par conséquent si on veut augmenter le surplomb d'une longueur x, il faut multiplier le nombre de briques déjà posées par e^{2x}. Pour se rendre compte, pour augmenter de 10 unités, il faut multiplier le nombre de briques déjà posées par plus de 480 millions. Pour finir voici quelques images que j'ai créées avec metapost pour voir la forme du pont avec 31, 100 et 1000 briques. Il y a un dégradé de gris toutes les 10 briques et toutes les 100 briques pour ces deux dernières images.

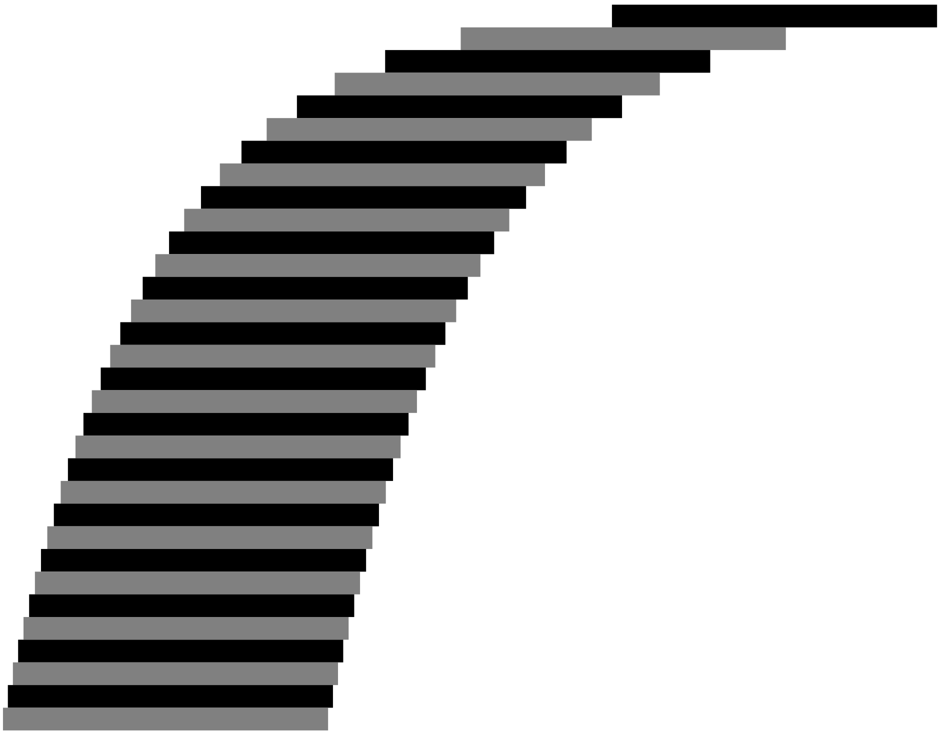


FIGURE 4 – Surplomb de 2 avec 31 briques de 4 cm et d'épaisseur 2 mm

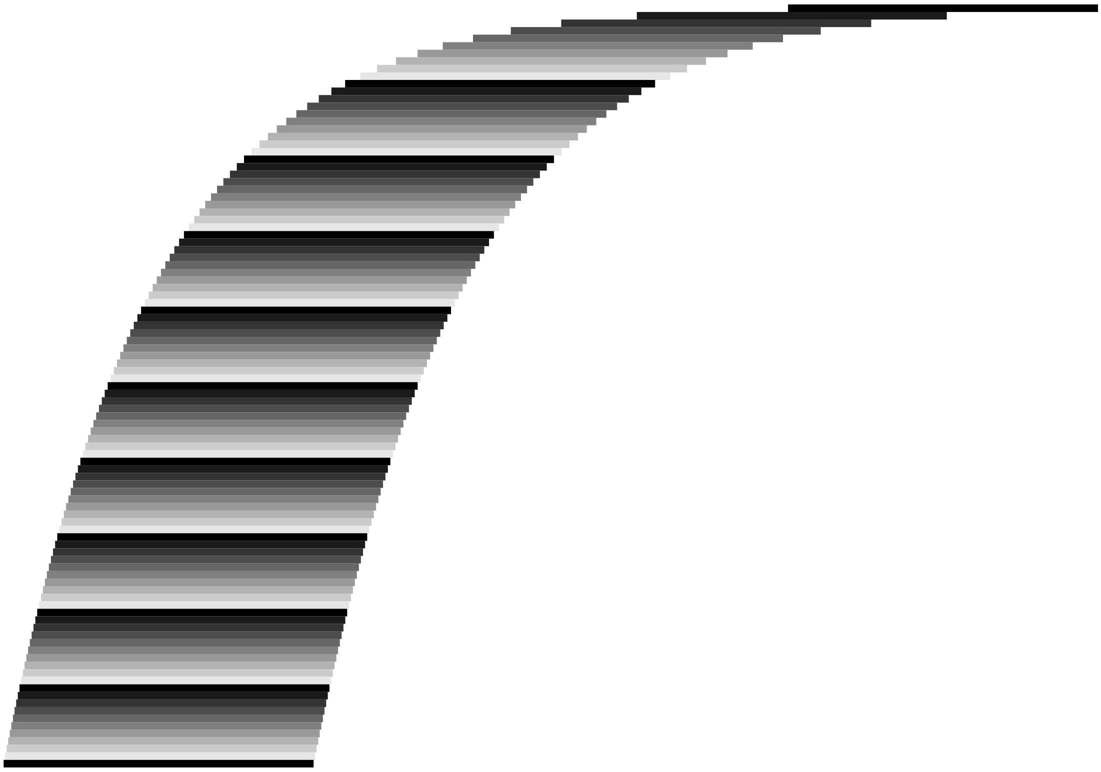


Figure 5 – Surplomb de 2,6 avec 100 briques de 4 cm et d'épaisseur 1 mm

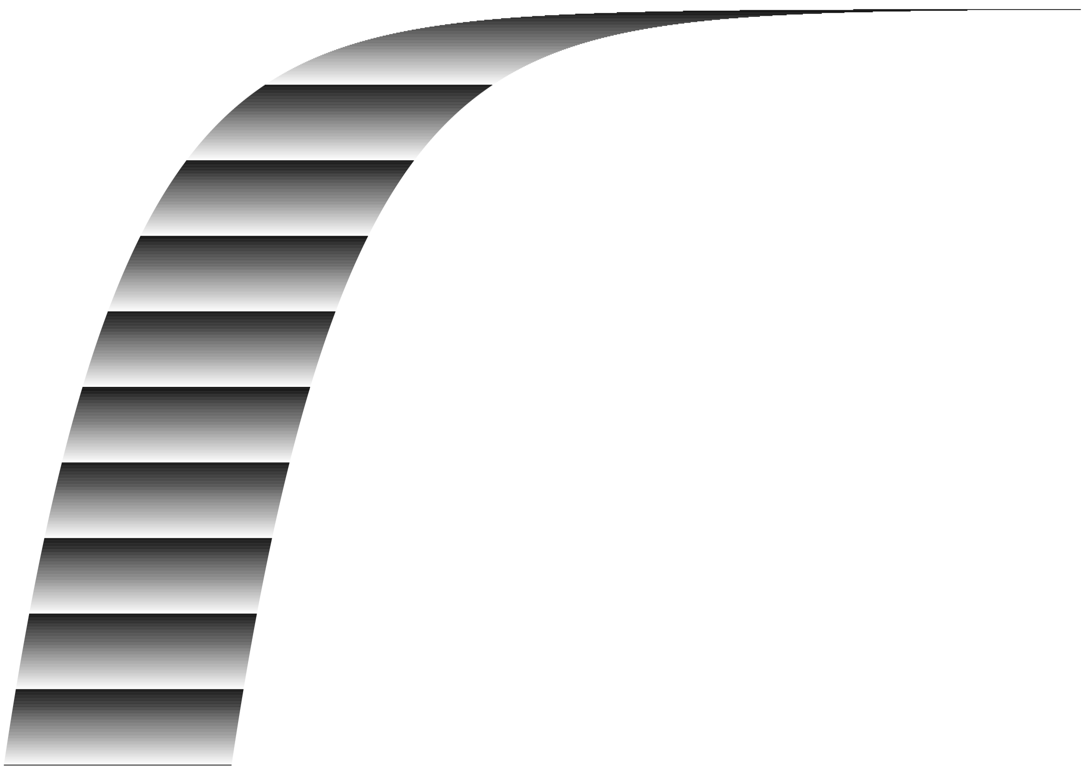


Figure 6 – Surplomb de 3,7 avec 1000 briques de 3 cm et d'épaisseur 0.1 mm

Quelques remarques :

1. Certains pourraient arguer qu'en pratique cela ne tient pas car chaque brique est en équilibre instable, une simple perturbation fait tout s'écrouler. Ce n'est pas vraiment recevable car on peut très bien reculer un petit peu chaque brique par un terme d'une série convergente, par exemple $\frac{1}{10\times 2^k}$ pour chaque k ième brique et alors x_n est seulement réduit de $\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10\times 2^k} = \frac{1}{10}(1-\frac{1}{2^{n+1}})$ qui tend vers $1/10$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Comme on le voit cette technique pour obtenir un porte-à-faux de longueur arbitraire est très gourmand en nombre de briques. Pour chaque brique on a choisi la position augmentant à chaque étape le plus possible la longueur du surplomb, mais cela ne garantit pas une solution globale optimale en terme de nombre de briques par unité de distance surplombée.