Mathématiques 2$^{\text{de}}$

Recueil d'exercices

Vincent PANTALONI

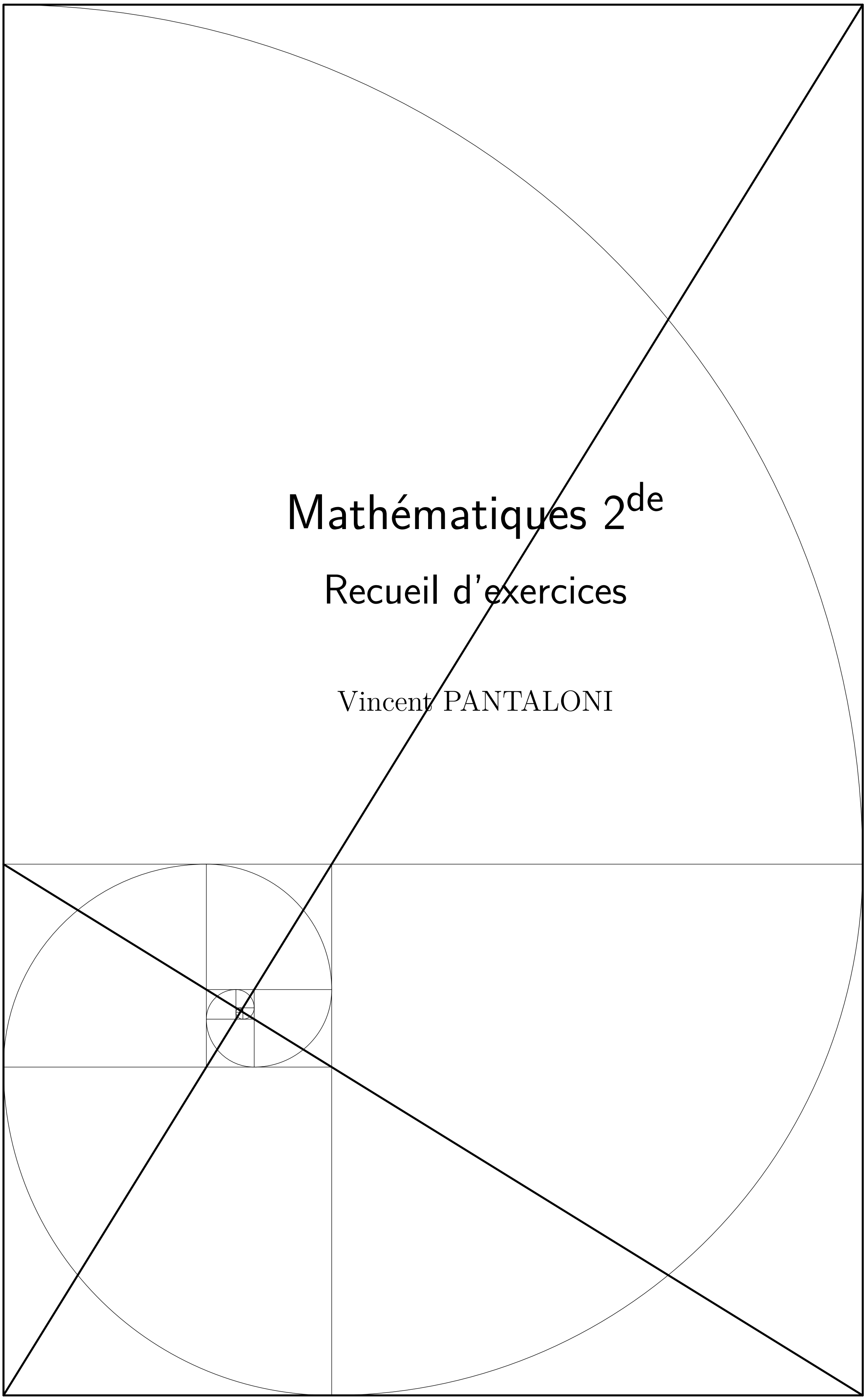


Table des matières

Pour bien démarrer

Exercice n° 1 — Identités remarquables (I.R.)

Les lettres a et b désignent des nombres quelconques, complète les formules suivantes :

① $(a+b)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

② $(a-b)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

③ $(a+b)(a-b) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

④ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (b \neq 0)$

⑤ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \dots\dots\dots\dots\dots$ (a et b positifs)

⑥ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \dots\dots\dots\dots$ (a et b positifs)

Exercice n° 2 — Développer

Développe et réduis les expressions suivantes :

$A = (3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$B = 2(5-\sqrt{3})^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$C = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$D = (\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$E = (2x-3)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$F = (3x-1)(2x-4) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$G = x(-x+3)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice n° 3 — Factoriser

1. $2x^2 - x = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. $3(x-4) - (2x-3)(x-4) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3. $(x+1)^2 - 2x - 2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4. $x^2 - 9 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5. $4x^2 - 25 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice n° 4 — Un développement de folie !

Tape sur ta calculette le calcul suivant :

$$K = \sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

Tu devrais trouver $K = 2$. Étonnant, non ? Pour le prouver à la main on va développer K^2.

$$K^2 = \left(\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2$$

$K^2 =$ .... utilise I.R.②

.... simplifie

.... I.R.⑤

.... I.R.③

.... simplifie

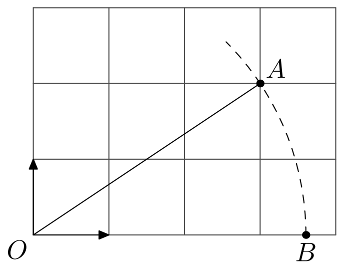
.... simplifie

.... simplifie

.... conclure

Exercice n° 5 — Construction à la règle et au compas

Sur la figure on a placé le point A de coordonnées $(3;2)$. Ensuite on a tracé un arc de cercle de centre O passant par A qui coupe alors l'axe des abscisses au point noté B.



1. Quelle est l'abscisse de B ?
2. Utiliser une construction du même type pour placer le point d'abscisse $\sqrt{5}$.

....

....

....

....

....

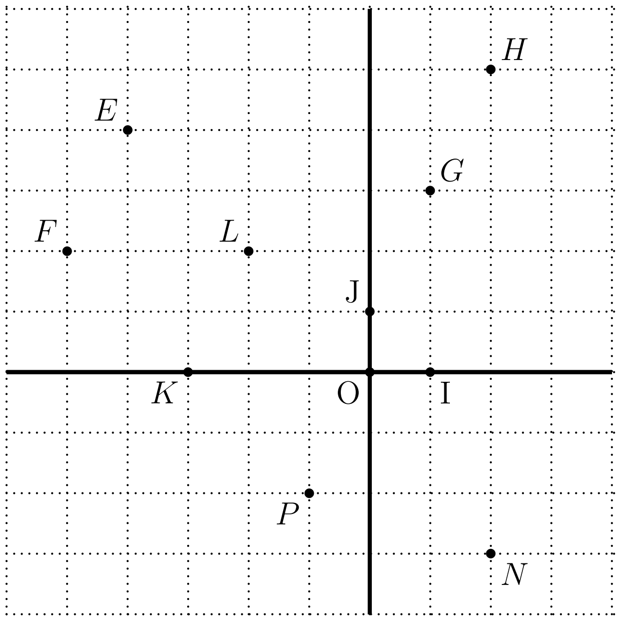
Chapitre I

Repérage dans le plan et configurations géométriques.

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) orthonormé.

Exercice n° 6

1. Lire les coordonnées des onze points marqués sur la figure.



$E(\ldots;\ldots)$

2. a. Placer R le milieu de $[EL]$ et lire ses coordonnées.

b. Quel calcul permet de trouver les coordonnées de R avec celles de E et L ?

. . . .

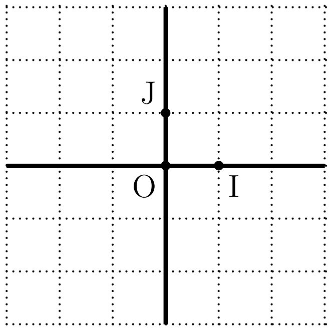
c. Placer les points $A(2;1)$ et $B(4;-3)$.

d. Déterminer par lecture graphique les coordonnées du milieu M de $[AB]$.

e. Vérifier la formule conjecturée au 2b.

f. Placer le point S, symétrique de B par rapport à A. Lire les coordonnées du point S.

Exercice n° 7 — Prouver qu'on a un parallélogramme.



1. Placer les points suivants :
   $A(-2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(3;0)$ et $D(2;3)$.
2. **a.** Calculer les coordonnées du milieu M de $[AC]$.
   b. Calculer les coordonnées du milieu P de $[BD]$.
   c. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice n° 8 — Sans figure jusqu'à l'exercice 14

On considère les points $A(1\ ;\ -2)$, $B(4\ ;\ -1)$ et $C(-2\ ;\ -3)$. Démontrer que le point C est le symétrique de B par rapport au point A par un calcul de coordonnées de milieu.

Exercice n° 9

On considère les points $A(-3;7)$, $B(2;-2)$, $C(-9;3)$ et $D(-14;12)$. Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice n° 10

On considère les points $A(2;-3)$, $B(1;2)$, $C(4;3)$. Déterminer les coordonnées $(x;y)$ du point D afin que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice n° 11 — Calculs de longueurs

Soit les points $E(3;2)$, $F(-3;4)$ et $M(-2;-3)$. Quelle est la nature du triangle EFM ?

Exercice n° 12 — Carré

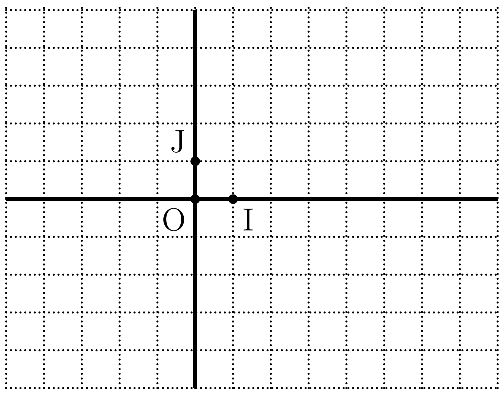
On considère les $A(2;3)$, $B(-1;1)$, $C(1;-2)$.

1. Prouver que ABC est un triangle isocèle rectangle.
2. Déterminer les coordonnées du point D afin que $ABCD$ soit un carré.

Exercice n° 13 — Calculs de longueurs

1. Représenter le quadrilatère $EFGH$ de sommets : $E(2;1)$ $F(1;-4)$ $G(-4;-5)$ et $H(-3;0)$.
2. Calculer la longueur des côtés de $EFGH$.
3. Que peut on alors dire de la nature de $EFGH$?

Exercice n° 14 — Avec un cercle



1. **a.** Placer les points $A(5;2)$ et $B(4;-1)$.
   b. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et qui passe par B.
2. Calculer le rayon du cercle.
3. Démontrer que ce cercle passe par le point D de coordonnées $(8;3)$.

Exercice n° 15 — Pythagore

On considère les points A(−1 ; 2), B(−3 ; −1) et C(3 ; −5).

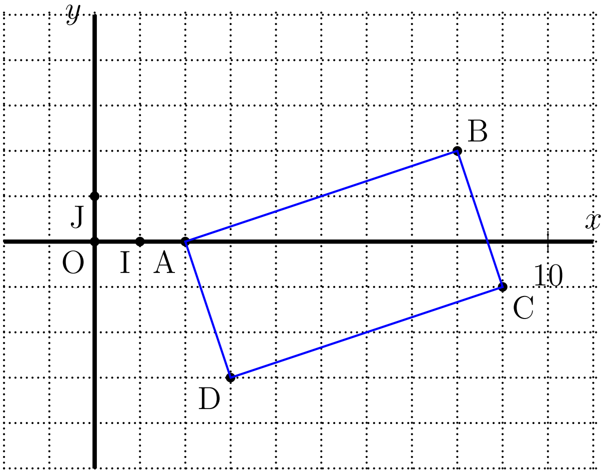
1. Montrer que AB $= \sqrt{13}$ et BC $= 2\sqrt{10}$.
2. Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

Exercice n° 16 — Pythagore

On considère les points $G(-3; 2)$ $H(-4; -1)$ et $K(2; -3)$. Le triangle GHK est-il rectangle ?

Exercice n° 17 — Quadrilatère particulier 1

1. Lire les coordonnées des points A, B, C et D de la figure suivante.



2. Démontrer à l'aide de calculs que ABCD est un parallélogramme.
3. **a.** Calculer AC et BD.

   b. Peut-on en déduire la nature du quadrilatère ABCD ?

Exercice n° 18 — Quadrilatère particulier 2

1. Placer les points P(4; −1), Q(−1; −2), N(0; 3) et M(5; 4) sur le repère ci-dessus.

   a. Calculer QP et QN.

   b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère PQNM ?

Exercice n° 19 — Quadrilatère particulier 3

Placer les points R(7; 5), S(10; −2), T(3; −5) et U(0; 2) sur le repère ci-dessus. Quelle semble être la nature de RSTU ? Prouvez le.

Exercice n° 20 — Alignement

1. Calculer les longueurs AB, BC et AC pour A(−6; 0), B(−3; 1) et C(6; 4).
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

Exercice n° 21 — Des carrés

Pour chacun des quadrilatères $ABCD$ ci-dessous choisir une stratégie différente pour prouver que c'est un carré.

① $A(3;4)$; $B(-3;0)$; $C(1;-6)$; $D(7;-2)$.
② $A(3;-2)$; $B(4;7)$; $C(-5;8)$; $D(-6;-1)$.
③ $A(5;2)$; $B(-5;6)$; $C(-9;-4)$; $D(1;-8)$.
④ $A(-4;2)$; $B(0;0)$; $C(2;4)$; $D(-2;6)$.

Exercice nº 22 — Préliminaire

Prouver que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times a$.

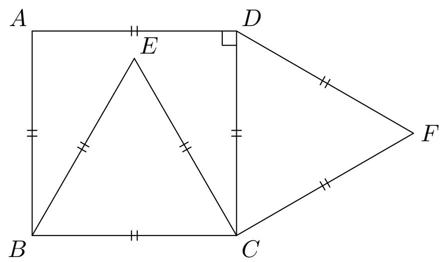
Exercice nº 23 — Fil rouge

Le but de ce problème est de montrer que les points A, E, et F sur la figure ci-dessous sont alignés. Nous traiterons ce problème de diverses manières cette année, en voici une première qui utilise la même technique que l'exercice nº 20

1. On se place dans le repère $(B;C;A)$. Justifier que ce repère est orthonormé.
2. En utilisant le résultat de l'exercice nº 22, donner sous forme de fraction les coordonnées de E et F dans le repère $(B;C;A)$.
3. Prouver que $AE = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ et $EF = \sqrt{2}$. Calculer aussi AF.
4. En utilisant vos identités remarquables préférées, développez cet affreux carré pour voir qu'il vaut simplement 2. (cf exercice nº 4)

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$$

5. Traduire cette égalité avec les longueurs AE, EF et AF pour conclure le problème.



Dans ce chapitre, je dois savoir...

1. Lire des coordonnées de points, placer des points dont on donne les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées d'un milieu de segment $[AB]$. Ce sont les moyennes des coordonnées de A et B .
3. Calculer une distance entre deux points A et B dans un RON connaissant leurs coordonnées. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
4. Déterminer la nature de différents triangles (isocèles, rectangles) ou quadrilatères (parallélogramme, losange, rectangle, carré) en utilisant les deux outils vus (milieux et distance).

Chapitre II

Découverte de fonction

A Image, antécédents, intervalles.

Exercice n° 24 — Traduction

Traduire par une égalité les phrases suivantes :

1. Le réel -5 est l'image de 4 par la fonction f. . . . .
2. Le réel 2 a pour image 0 par la fonction g. . . . .
3. Un antécédent de -3 par la fonction h est 5. . . . .
4. Les images de -3 et 5 par f sont nulles. . . . .
5. La courbe de la fonction f passe par le point de coordonnées $(3; -1)$. . . . .
6. La représentation graphique de la fonction g coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3. . . . .
7. La courbe représentant la fonction h, passe par l'origine. . . . .
8. La courbe représentative de h coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -3 et 5. . . . .

Exercice n° 25 — Images et antécédents

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x - 1$.

1. Calculer les images par f de $\dfrac{1}{2}$, -3 et $1+\sqrt{2}$.
2. Déterminer les antécédents par f de -1 et -2.

Exercice n° 26 — Intervalles

Traduire sous forme d'intervalle les encadrements suivants. Exple : $3 \leqslant x < 4 \iff x \in [3; 4[$.

1. $3 < x \leqslant 4$
2. $x > 3$
3. $x \leqslant 5$
4. $1 < x < 2$
5. $x > 7$
6. x positif.
7. $10 < x$
8. $8 > x \geqslant 7$

Exercice n° 27 — Images et antécédents

On considère la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$

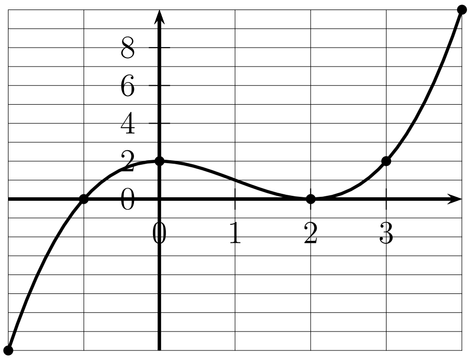
1. Calculer les images par h de 3, -2 et 8. Mettre le résultat sous forme de fraction irréductible.
2. Trouver un nombre qui n'a pas d'image par h.
3. Déterminer les *racines* de g.

B Résolution graphique.

Exercice n° 28 — Lecture graphique

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.

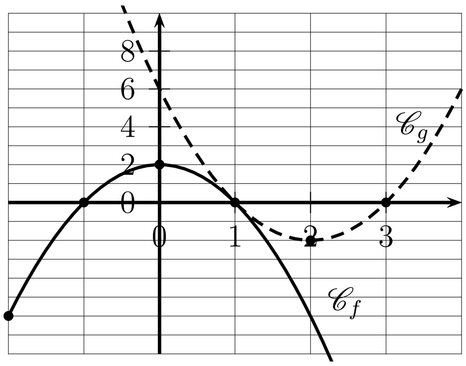
1. Lire les images de 1 et 4 par f.
2. Lire les antécédents de 0 et 2 par f.
3. Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
4. Quel est l'ensemble des nombres qui admettent trois antécédents ?
5. Tracez la droite d'équation $y = x$. Quels sont les nombres dont l'image par f est le même nombre ?



Exercice n° 29 — Avec deux courbes (bis)

On considère deux fonctions f et g définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ dont les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les *paraboles* tracées ci-contre.

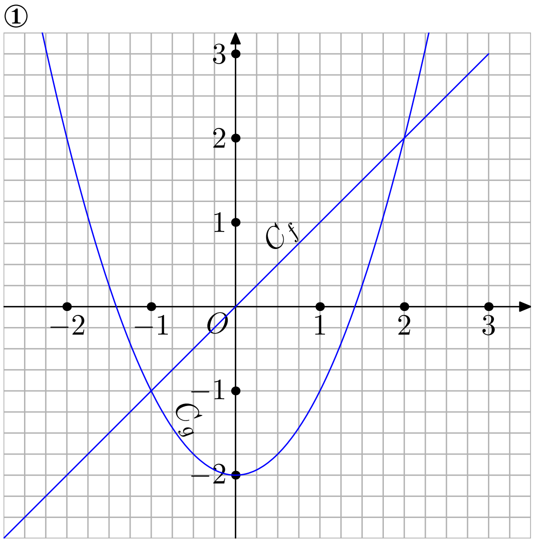
1. Lire les images de 1 et 0 par f.
2. Lire les antécédents de 0 et de -6 par f.
3. Quelles sont les racines de g ?
4. Résoudre graphiquement :
   ① $g(x) = 6$; ② $f(x) = g(x)$;
   ③ $f(x) \geqslant 0$; ④ $g(x) < 0$
5. Tracez la droite qui sépare les deux paraboles. Quelle est son équation ?



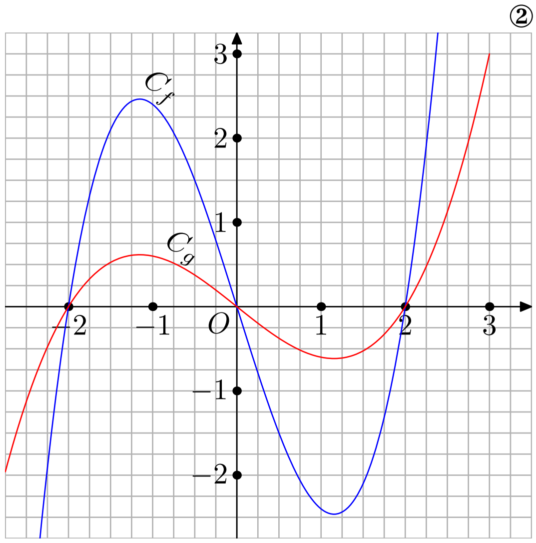
Exercice n° 30 — Avec deux courbes

Pour chaque graphique, C_f et C_g désignent les courbes respectives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur $\mathbb{R}$.

①



②



Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations et équations proposées. On donnera l'ensemble des solutions sous la forme $S = \ldots$

Avec le graphique ①

1. $g(x) = 2$. $S = \{ \quad ; \quad \}$

2. $g(x) \leqslant 2$. $S = [\quad ; \quad]$

3. $g(x) < 2$. ....

4. $g(x) \geqslant 2$. ....

5. $g(x) > 2$. ....

6. $g(x) \leqslant 0$. ....

7. $-1 \leqslant g(x) < 2$. ....

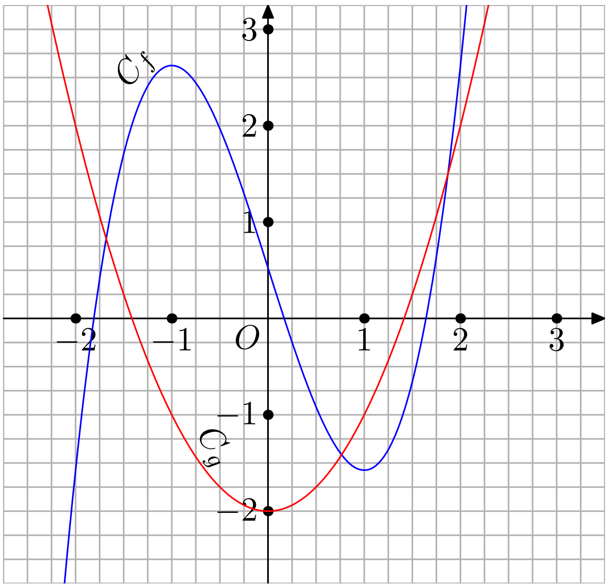
Avec les graphiques ① et ②

	$f(x) = g(x)$	$f(x) \leqslant g(x)$	$f(x) > g(x)$
①			
②			

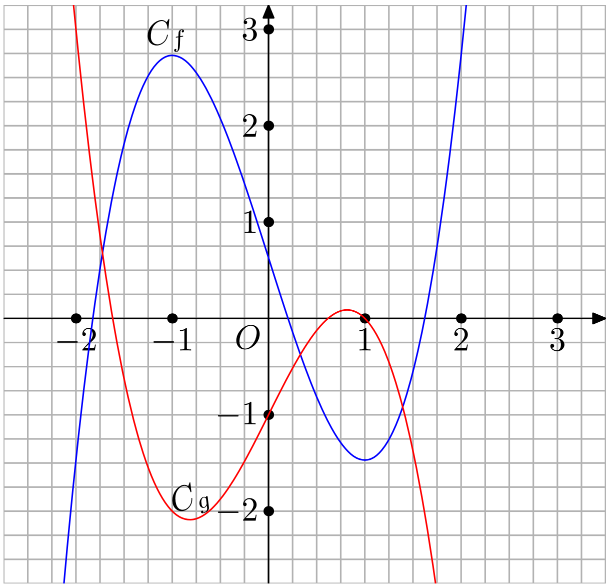
Exercice n° 31 — Avec deux courbes (ter)

Pour chaque graphique, C_f et C_g désignent les courbes respectives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur $\mathbb{R}$. On donnera des valeurs approchées à 10^{-1} près.

③



④



$g(x) = 0$. $S =$

$g(x) < 0$. $S =$

$g(x) \leqslant -1$. $S =$

$g(x) \geqslant -1,5$. $S =$

$f(x) > 0,5$. $S =$

$f(x) = g(x)$. $S =$

$f(x) \leqslant g(x)$. $S =$

$f(x) > g(x)$. $S =$

$g(x) = 0$. $S =$

$g(x) > 1$. $S =$

$g(x) \leqslant -1,5$. $S =$

$f(x) \geqslant 1$. $S =$

$f(x) \leqslant 0$. $S =$

$f(x) = g(x)$. $S =$

$f(x) \leqslant g(x)$. $S =$

$f(x) > g(x)$. $S =$

Exercice n° 32 — En Physique : Chute des corps

On reproduit en T.P. de physique l'expérience suivante de Galilée (Pise, 1564 – Florence, 1642). On lâche une bille d'une certaine hauteur h et on chronomètre le temps t que la bille met pour toucher le sol. On recommence pour différentes hauteurs. Maurice obtient le tableau ci-dessous.

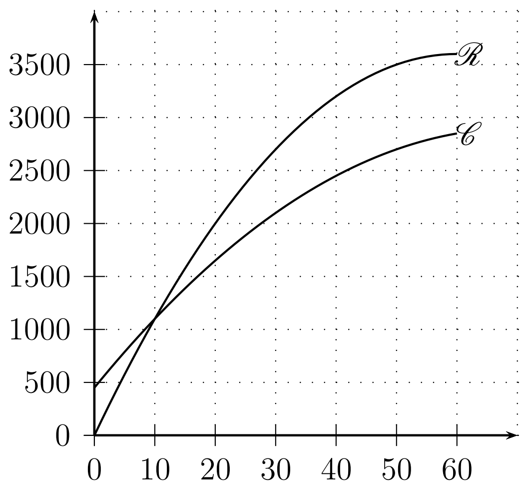
1. Compléter la valeur évidente de t lorsque $h = 0$.
2. On veut étudier le temps de chute en fonction de la hauteur. Placer sur un graphique les points correspondant aux mesures effectuées (unités : 1 cm pour 5 cm (pour h) et 1 cm pour 0,05 s).
3. Cette fonction est-elle affine ?
4. Maurice a oublié de noter le temps de chute pour $h = 30$ cm. Déterminer une valeur approchée de cette valeur.
5. On cherche une formule reliant h et t pour trouver la loi physique qui décrit la chute d'un corps. Parmi les formules ci-dessous laquelle semble cohérente avec les mesures de Maurice :
   ☐ $t = 0,007 \times h^2$ ☐ $t = 0,03 \times h$ ☐ $t = 0,04\sqrt{h}$
6. Calculer alors la valeur manquante $t(30)$.
7. Combien de temps mettrait la bille pour chuter du haut de la tour de Pise qui culmine à 54 m ?

h en cm	t en s
0	
2	0,06
10	0,13
20	0,18
30	?
45	0,27

Exercice n° 33 — En économie : Coût, recette, bénéfice

Une entreprise fabrique des objets et vend toute sa production. Pour x objets fabriqués, on appelle $C(x)$ le coût total de fabrication, exprimé en euros, et $R(x)$ la recette totale, exprimée en euros. Les fonctions C et R sont représentées ci-dessous, respectivement par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{R}$.

1. Quelle est la recette obtenue pour la vente de 30 objets ?
2. Quel est le coût total de fabrication de 30 objets ?
3. Quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle produit et vend 30 objets ?
4. Pour quelles valeurs de x l'entreprise est-elle déficitaire ? (Expliquer la démarche.)
5. L'entreprise fabrique 50 objets. Malheureusement, elle n'arrive pas à les vendre au prix prévu. Peut-elle appliquer une remise de 20 % sans pour cela vendre à perte ?



C Algorithmique et fonctions.

Exercice n° 34 ——— ALGO

Dans les algorithmes, quand on note $2 \to x$ cela signifie « la valeur 2 est stockée dans la variable x ». Autrement dit, « x devient égal à 2 ». Voici un même algorithme de calcul écrit de deux manières :

début
- Prendre un nombre x;
- Le multiplier par 2;
- Lui ajouter 3;
- Afficher le résultat;

fin

Algorithme 1 : Langage naturel

début
- **Données** : Un nombre x
- $2x \to x$;
- $x + 3 \to x$;
- Afficher x;

fin

Algorithme 2 : Langage machine

1. Appliquer cet algorithme aux nombres 2 ; 3 ; 4.
2. Donner le résultat en fonction du nombre x de départ. On notera $f(x)$ ce résultat.
3. Quel type de fonction est f ?
4. Maurice a appliqué l'algorithme avec un nombre qu'il a gardé secret et annonce : « le résultat est 1. »
   - **a.** Trouver le nombre de départ que Maurice avait choisi.
   - **b.** Reformuler la question précédente avec le vocabulaire des fonctions.
5. Plus généralement, connaissant le résultat y de l'algorithme **1**, écrire un nouvel algorithme permettant de trouver le nombre de départ.
6. Donner la formule qui permet de passer du résultat y de l'algorithme 1 au nombre initial x.

Exercice n° 35 — Algorithmique ——— ALGO

Testez les algorithmes suivants avec deux valeurs de votre choix puis faire le calcul algébriquement avec la lettre x.

① Prendre un nombre quelconque, doublez le, retrancher 5, multiplier le tout par 3, ajouter 15 au résultat et enfin diviser le tout par 6. Qu'obtient-on ?

② Prendre un nombre quelconque non nul, retrancher 2, élever au carré, soustraire 4, diviser le résultat par le nombre choisi au début et enfin ajouter quatre. Qu'obtient-on ?

Exercice n° 36 — Algorithmique ——— ALGO

Les algorithmes suivants donnent ils le même résultat ? La notation $a \to b$ (type calculette) signifie « La valeur de a est stockée dans la variable b. »

Variables : x : nombres.

① Entrer un nombre x ;

② $x^2 \to x$;

③ $x - 1 \to x$;

④ Afficher x.

Variables : x, a : nombres.

① Entrer un nombre x ;

② $x - 1 \to a$;

③ $a^2 \to x$;

④ Afficher x.

Variables : x, a, b : nombres.

① Entrer un nombre x ;

② $x - 1 \to a$;

③ $x + 1 \to b$;

④ $a * b \to x$;

⑤ Afficher x.

Dans ce chapitre, je dois savoir. . .

1. connaître le vocabulaire : image, antécédent, « f de x », axe des abscisses, axe des ordonnées.
2. déterminer l'image d'un nombre par une fonction dont on donne l'expression (calcul à faire) ou la courbe (lecture graphique).
3. déterminer les antécedénts d'un nombre par une fonction dont on donne la courbe.
4. résoudre graphiquement des équations et inéquations de la forme : $f(x) = 3$, $f(x) = g(x)$, $f(x) \leqslant 5$, $f(x) \geqslant g(x)$...
5. donner des solutions sous forme d'intervalles, sans se tromper sur les crochets !
6. comprendre les premiers algorithmes vus.

Chapitre III

Statistiques.

A Statistiques descriptives.

Exercice n° 37

Pour chaque série ci-dessous, déterminer sa moyenne, sa médiane et ses quartiles.

①

Notes	8	10	12	16
Effectifs	2	8	9	6

②

Notes	8	10	12	16
Fréquences	0,2	0,1	0,4	0,3

Exercice n° 38 — Moyenne de moyennes

Une classe de seconde court le 100 m en athlétisme. En moyenne les filles mettent 14s et les garçons 12s.

1. Peut-on connaître le temps moyen mis par les élèves de la classe ?
2. Même question si on sait qu'il y a 40% de garçons dans la classe.
3. Même question si on sait qu'il y a 22 filles dans la classe.

Exercice n° 39 — Effet de structure

Un concours est organisé dans deux centres d'examens. Tous les candidats passent la même épreuve.

- Dans le premier centre, les garçons ont obtenu 13 de moyenne et les filles 12 de moyenne.
- Dans le second centre, les garçons ont obtenu 9 de moyenne et les filles 8 de moyenne.

Le président du jury en déduit que les garçons ont obtenu de meilleurs résultats que les filles. Dans le premier centre, 58 garçons et 104 filles ont composé, dans le second, 87 garçons et 32 filles ont composé.

Qu'en pensez vous ?

Exercice n° 40 — Salaire moyen ou salaire médian ?

Le salaire moyen dans une entreprise est de 1300 euros par mois.
Maurice se dit :« Puisque je gagne 1200 euros par mois, je gagne moins que la majorité des salariés. »
Quelle confusion Maurice fait-il ? Pour prouver que Maurice fait un raisonnement faux, compléter la répartition de salaires ci-dessous avec la valeur de x qui correspond aux données du texte.

Salaires en millier d'euros	1	1,2	2
Effectifs	x	1	4

Exercice n° 41 — Effectifs cumulés croissants

On a relevé, une journée donnée, les durées mises par les élèves d'une classe de seconde pour se rendre au lycée. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

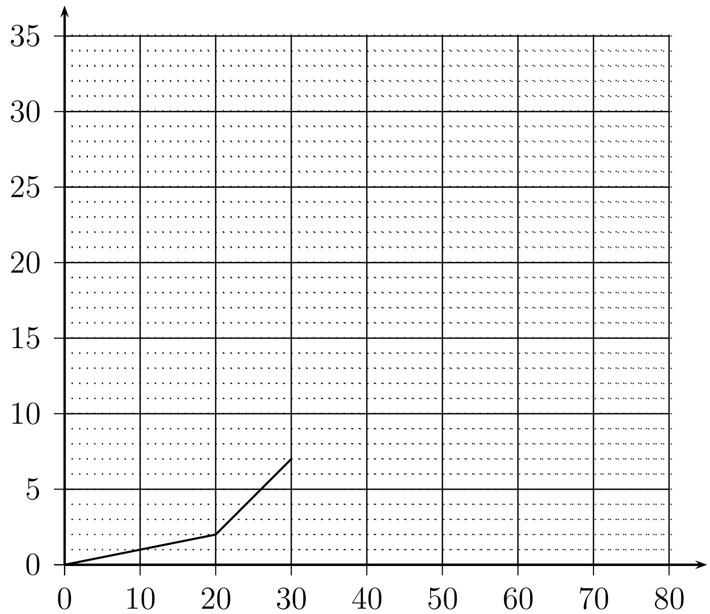
Durée (en min)	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$	$[60;70[$	$[70;80]$
Effectif	2	5	15	7	3	2	1

1. Compléter le tableau suivant :

Durée x (en min)	$x < 20$	$x < 30$	$x < 40$	$x < 50$	$x < 60$	$x < 70$	$x \leqslant 80$
Effectif							

2. Donner un encadrement de la médiane ainsi que des premier et troisième quartiles.

3. Compléter le graphique suivant (polygone des effectifs cumulés croissants) :



4. Lire une valeur approchée de la médiane ainsi que des premier et troisième quartiles.

Exercice n° 42 — Fréquences cumulées croissantes

Les salaires (en milliers d'euros) des employés d'une entreprise sont regroupés en quatre classes comme l'indique le tableau. On pourra à loisir compléter ce tableau.

Classe	$[1;1,5[$	$[1,5;2[$	$[2;2,5[$	$[2,5;5[$
Fréquences	18%	28%	30%	24%
Effectifs			96	

1. Combien y a-t-il d'employés dans l'entreprise ?

2. Déterminer le salaire moyen dans cette entreprise.

3. Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes de cette série.

4. Déterminer graphiquement la médiane de la série et tracer le diagramme en boîte.

B Fluctuation d'échantillonnage.

Exercice n° 43

On suppose que, dans la population des jeunes de 18 à 20 ans, 40% des individus ont le permis de conduire. Combien de sujets doit on choisir au hasard dans cette population pour avoir 95% de chances qu'il y ait entre 30% et 50% de personnes avec le permis de conduire dans l'échantillon ainsi constitué ? On a interviewé 400 étudiants dans un IUT. Parmi eux, 185 ont le permis. Doit on au risque de 5% rejeter l'hypothèse que 40% des élèves d'IUT ont le permis ?

Exercice n° 44

On a trouvé un intervalle de fluctuation au seuil de 95% qui est $[0,06; 0,08]$. Qu'en déduit-on ?

Exercice n° 45 — QCM bac 2014

En France, le 1er janvier 2010, 48,7% des foyers possédaient au moins un écran plat de télévision. Une étude s'intéresse à un échantillon de 150 foyers possédant au moins un écran plat de télévision et domiciliés dans une même ville. Un intervalle de fluctuation à au moins 95% de la fréquence de ces foyers possédant un écran plat est :

a) [48,6 ;48,8] b) [0,35 ;0,52] c) [0,40 ;0,57]

Exercice n° 46 — Bac 2014

En France, en 2011, 22% des sportifs licenciés avaient une licence de football. Déterminer un intervalle de fluctuation à au moins 95% de la fréquence des licenciés de football dans un échantillon de 400 sportifs licenciés choisis au hasard parmi les sportifs licenciés en 2011.

Exercice n° 47

On considère que dans la population d'une grande ville donnée, 15% des enfants entrant à l'école élémentaire ont des difficultés scolaires. Un directeur d'école est surpris par le nombre important d'enfants en difficulté dans son établissement, puisqu'il en a compté 25 sur un total de 120 élèves.

1. **a.** Déterminer l'intervalle de fluctuation de niveau 95% de la proportion d'enfants en difficulté scolaire dans un échantillon de taille 120 dans cette ville.
   b. Quelle est la fréquence d'enfants en difficulté observée par le directeur dans son école ?
   c. Que peut on en déduire ?
2. Quelle taille d'échantillon faut il choisir pour que la fréquence observée dans la question 1b soit en dehors de l'intervalle de fluctuation ?

Exercices en ligne (10 questions de QCM) : `http://bit.do/QCMfluctu`

Exercice n° 48 — L'affaire Partida (true story !)

Arrêté au Texas en Novembre 1976, Rodrigo Partida est condamné à huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol. Il attaque ce jugement au motif que la désignation des jurés du comté est discriminante à l'égard des américains d'origine mexicaine : 79,1% de la population du comté est d'origine mexicaine, or sur les 870 personnes convoquées pour être jurés sur une période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.

Quel calcul et raisonnement mathématique a permis de relaxer Rodrigo Partida ?

Dans ce chapitre, je dois savoir. . .

A. Statistiques descriptives.

1. calculer une moyenne avec les effectifs, ou les fréquences, et aussi si on dispose de données par classes (intervalles).
2. déterminer la médiane et les quartiles d'une petite série statistique avec les effectifs ou les fréquences.
3. calculer des effectifs ou fréquences cumulées.
4. tracer un polygone des fréquences (ou effectifs) cumulées croissantes et ensuite déterminer graphiquement médiane et quartiles.
5. exprimer clairement en une phrase à quoi correspondent ces valeurs (e.g. 50% des élèves ont eu une note inférieure à la médiane.)

B. Fluctuation d'échantillonnage.

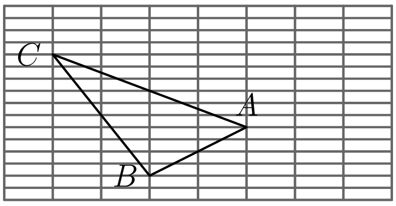
1. repérer dans un texte quelle est la part (pourcentage) connue p et l'effectif de l'échantillon n.
2. déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%, $I_f = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et l'interpréter pour prendre une décision selon si la fréquence f calculée est dans I_f ou pas.

Chapitre IV

Découverte des vecteurs.

Exercice nº 49 — Translation

Construire le translaté du triangle ABC dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.



Exercice nº 50 — Translation

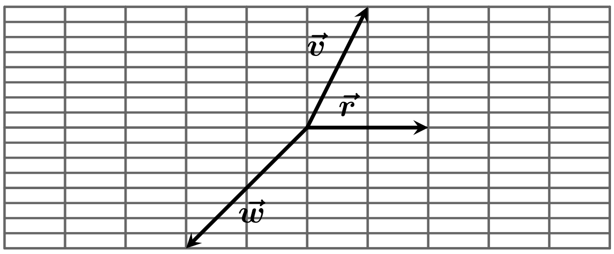
Construire un carré $ABCD$ de côté 2 carreaux et de centre O. Construire l'image de ce carré :

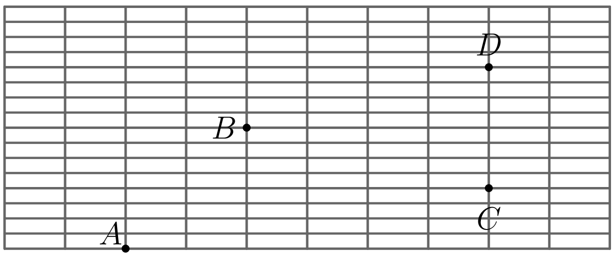
1. par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
2. par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
3. par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Exercice nº 51 — Construire une somme de vecteurs

Construire les vecteurs suivants.

1. $\vec{w}+\vec{r}$
2. $\vec{r}+\vec{v}$
3. $\vec{v}+\vec{w}$
4. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
5. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
6. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}$

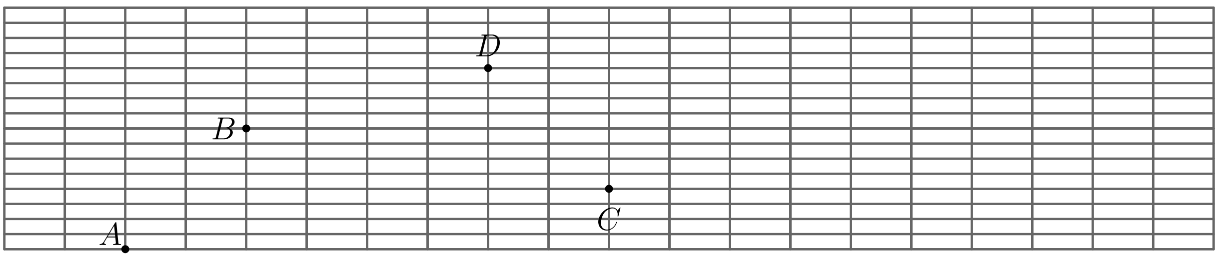




Exercice nº 52 — Construire une somme de vecteurs

Placer les points M, N, P, Q.

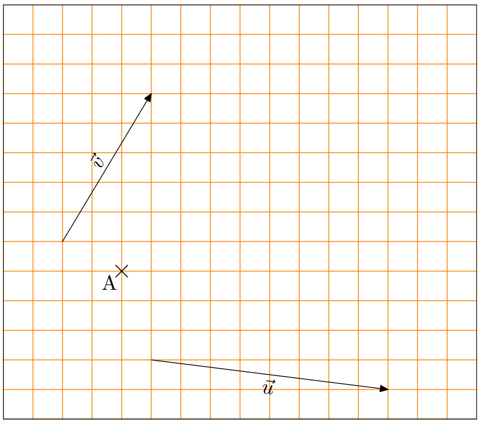
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DQ} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$.



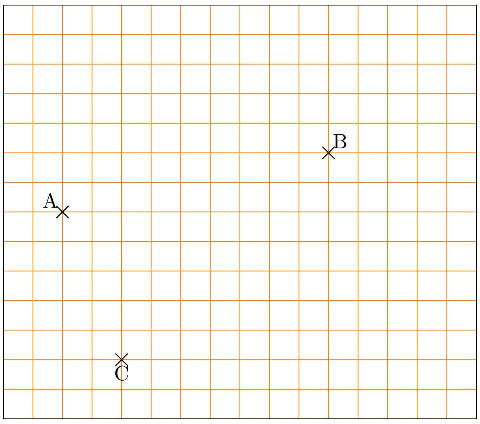
Exercice n° 53 — Construire une somme de vecteurs

Placer les points M et N dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{u} + \vec{v}$



2. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

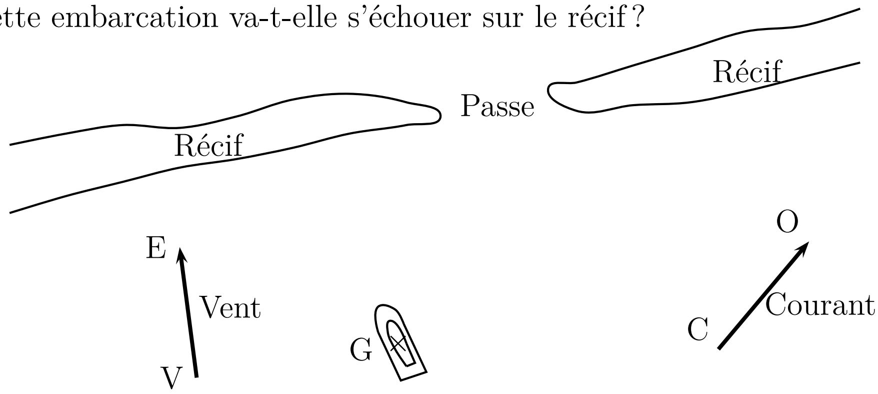


Exercice n° 54

Sur le schéma donné ci-dessous, un bateau est tombé en panne de moteur à l'approche d'une passe. Il n'est plus soumis qu'aux forces conjuguées du vent et du courant représentées par les vecteurs $\overrightarrow{VE}$ et $\overrightarrow{CO}$.

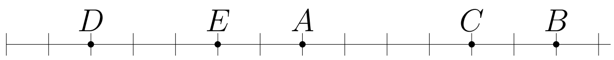
1. Construire le point A tel que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} = \overrightarrow{\mathrm{VE}}$.
2. Construire le point B tel que $\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{\mathrm{CO}}$.
3. Construire le point T tel que $\overrightarrow{\mathrm{GT}} = \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}$.
4. **a.** Tracer la demi-droite [GT) qui indique la trajectoire de la dérive du bateau.

   b. Cette embarcation va-t-elle s'échouer sur le récif ?



Exercice n° 55 — Multiplication par un réel

On considère les cinq points A, B, C, D et E situés sur la droite graduée ci-dessous.



Compléter les pointillés avec le bon nombre réel :

$\overrightarrow{AB} = \ldots \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} = \ldots \overrightarrow{AE}$ $\quad$ $\overrightarrow{EC} = \ldots \overrightarrow{EB}$ $\quad$ $\overrightarrow{CD} = \ldots \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{CE} = \ldots \overrightarrow{AC}$

Dans ce chapitre, je dois savoir...

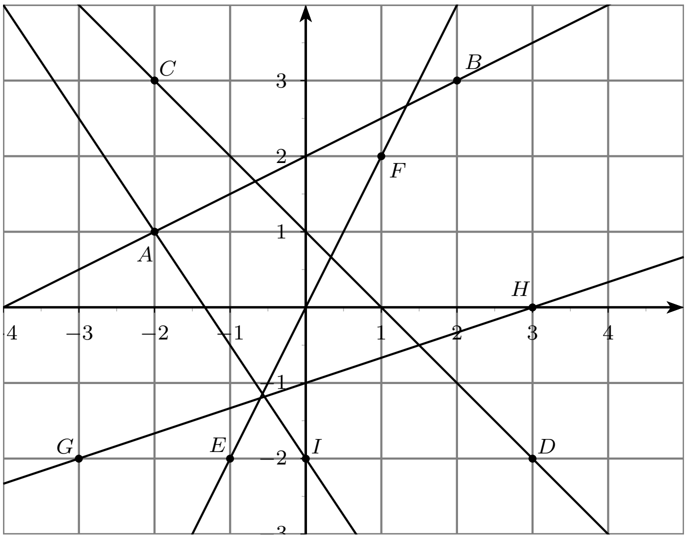
1. opérer une translation sur une forme simple
2. construire une somme de vecteurs en utilisant un quadrillage.
3. construire les vecteurs $2\vec{u}$, $-\frac{1}{3}\vec{u}$, $\frac{5}{4}\vec{u}$, ... si $\vec{u}$ est donné.

Chapitre V

Fonctions affines.

Exercice n° 56

Pour chaque droite tracée, donner l'expression de la fonction affine qu'elle représente. Tous les points placés sont à coordonnées entières.



(AB) : $f(x) = \dots$

(CD) : $g(x) = \dots$

(GH) : $h(x) = \dots$

(EF) : $i(x) = \dots$

(AI) : $j(x) = \dots$

Exercice n° 57

Pour les tableaux de valeurs suivants qui sont ceux de quatre fonctions affines : déterminer le coefficient directeur a, et la valeur manquante.

x	0	1	2
$f(x)$	1	4	

x	1	3	4
$g(x)$	10	4	

x	-1	1	5
$h(x)$	1	-1	

x	2	4	
$i(x)$	-2	4	22

$a = \dots$ $a = \dots$ $a = \dots$ $a = \dots$

Exercice n° 58 — Tableau de signes

Résoudre chacune des inéquations proposées à l'aide d'un tableau de signes.

1. $(2x-3)(-3x+2) > 0$

2. $4x(3-x) \leqslant 0$

3. $(-2x-5)(-3x-8) < 0$

4. $-2x(1-2x)(x+1) \geqslant 0$

Exercice n° 59 — Factorisation + Tableau de signes

Résoudre chacune des inéquations proposées à l'aide d'un tableau de signes.
Il faut penser à factoriser avant ! On pourra se reporter à l'exercice n° 3 page 1.

1. $2x^2 - x \geqslant 0$
2. $3(x-4) - (2x-3)(x-4) < 0$
3. $(x+1)^2 > 2x+2$
4. $4x^2 - 9 \geqslant 0$

Exercice n° 60

Déterminer l'expression des fonctions affines qui admettent les tableaux de valeurs suivants.

x	0	1
$f(x)$	1	5

x	1	3
$g(x)$	-1	5

x	-4	2
$h(x)$	2	-3

x	-5	-2
$i(x)$	8	3

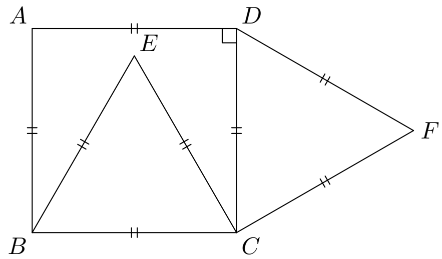
Exercice n° 61 ALGO

Ecrire un algorithme qui permet de résoudre l'exercice précédent.

Exercice n° 62 — Fil rouge

Le but de ce problème est de montrer que les points A, E, et F sur la figure sont alignés.

1. En utilisant le résultat de l'exercice n° 22, donner sous forme de fraction les coordonnées de A, E et F dans le repère $(B; C; A)$.
2. Déterminez l'équation de la droite (AE).
3. Conclure le problème.

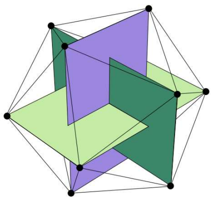


Dans ce chapitre, je dois savoir...

1. déterminer le coefficient directeur d'une fonction affine, soit à partir d'un graphique, soit à partir d'un tableau de valeurs.
2. lire l'ordonnée à l'origine d'une fonction affine à partir d'un graphique et finalement donner l'expression de la fonction.
3. dresser le tableau de signe d'un produit de fonctions affines et dire quand ce produit est positif ou négatif en utilisant des intervalles.
4. factoriser une expression simple comme produit de fonction affines et résoudre une inéquation du type : $4x+4 < x(x+1)$ ou $x \geqslant 4x^2$

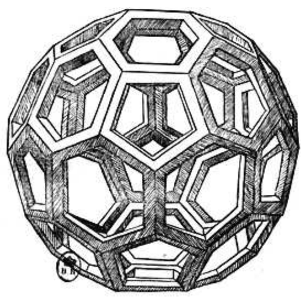
Chapitre VI

Géométrie spatiale.



Les sommets d'un icosaèdre sont les sommets de trois rectangles d'or deux à deux perpendiculaires en leur centre.

Un icosaèdre tronqué donne un ballon de football.

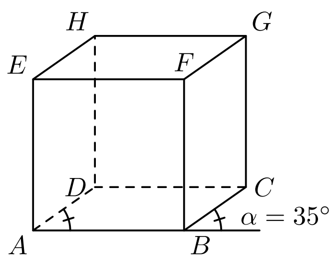


.

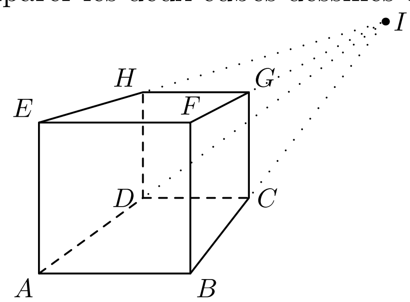
Icosaèdre tronqué. Gravure par Leonardo Da Vinci dans *De Divina Proportione* de Fra Luca Pacioli.

A Perspective cavalière

Il y a plusieurs façons de représenter en deux dimensions des objets tridimentionnels. En mathématiques, on utilise la perspective cavalière. Dans les beaux-arts on utilise plus volontiers la perspective avec points de fuites. Comparer les deux cubes dessinés ci-dessous :



Perspective cavalière.

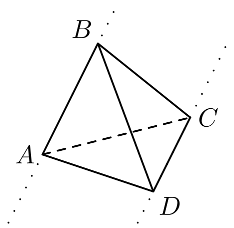


Perspective avec point de fuite.

En perspective cavalière la face avant du cube est représentée à l'échelle, avec ses angles droits et ses quatre côtés de la même longueur. Les fuyantes comme (BC) et (AD) font un angle α constant avec (AB) et sont raccourcies.

Les fuyantes passent toutes par le point de fuite, noté I et ne sont donc pas parallèles. Bien que plus réaliste, on ne l'utilisera pas en math car des arètes parallèles ne sont pas nécessairement représentées par des droites parallèles.

Propriétés de la perspective cavalière.
- Deux droites parallèles sont représentées par des droites parallèles.
- Deux droites sécantes sont représentées par des droites sécantes.



Les réciproques sont fausses ! Observez le tétraèdre $ABCD$ ci–contre.

- Les droites . . . . . . et. . . . . . sont dessinées parallèles mais ne le sont pas en réalité.
- Les droites . . . . . . et. . . . . . sont dessinées sécantes mais ne le sont pas en réalité.

B Positions relatives d'objets dans l'espace.

B.1 Points/points

Deux points A et B distincts de l'espace sont alignés, ils déterminent une droite. C'est à dire qu'il existe une droite et une seule passant par A et B, on la note (AB). Ceci est un axiome d'Euclide.

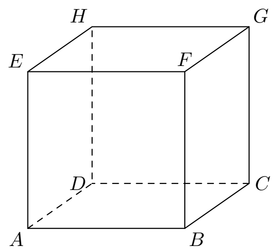
Trois points A, B, C non alignés de l'espace déterminent un plan que l'on note (ABC). Il existe un plan et un seul passant par les trois points A, B et C. c'est l'ensemble des points M tels qu'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Quatre points de l'espace ne sont pas nécessairement dans un même plan. Ils peuvent être les sommets d'un *tétraèdre* comme sur la figure ci–dessus. On dit qu'ils sont *non-coplanaires*. Deux ou trois points sont toujours coplanaires.

B.2 Droite/droite

Dans l'espace deux droites ne sont pas nécessairement coplanaires. Par exemple dans le tétraèdre $ABCD$ les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. En effet : A, B, C appartiennent à un seul plan : (ABC) ; donc si (AB) et (CD) étaient dans un même plan ce serait nécessairement (ABC) mais $D \notin (ABC)$. En observant le cube $ABCDEFGH$, complète le tableau ci–dessous. Écris dans la partie gauche de chaque case un C si les deux droites d et d' sont coplanaires et un NC si elles sont non-coplanaires. Indique aussi dans la partie de droite de chaque case si d et d' sont sécantes (par un X) ou parallèles (par //)

d / d'	(DC)	(FG)	(FD)
(AB)	/	/	/
(EH)	/	/	/
(EC)	/	/	/

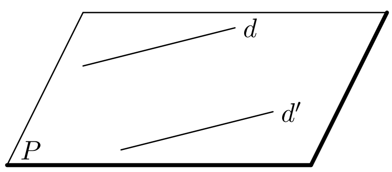
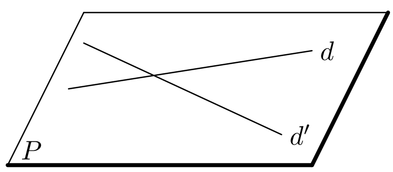
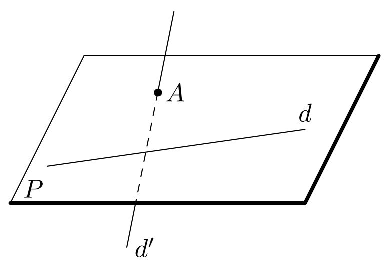


Dans le plan on sait que deux droites sont soit parallèles soit sécantes.

Donc deux droites coplanaires dans l'espace sont soit ....
Dans l'espace deux droites peuvent être non coplanaires. Peuvent elles dans ce cas être parallèles ou sécantes ? Non ! Car deux droites sécantes ou parallèles sont toujours coplanaires.

Conclusion : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.
- Si elles sont coplanaires, elles sont soit sécantes soit parallèles.
- Réciproquement, si elles sont sécantes ou parallèles, elles sont coplanaires.
- Donc si elles sont non coplanaires elles ne sont ni sécantes ni parallèles.

En pratique : Si deux droites sont dessinées sécantes, et que l'on sait qu'elles sont coplanaires, alors on peut conclure qu'elles sont réellement sécantes.

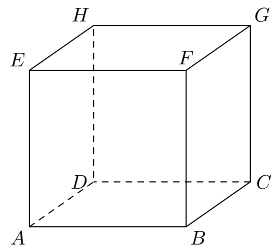
<table>
<tr><th colspan="2">Droites coplanaires</th><th rowspan="2">Droites non coplanaires</th></tr>
<tr><th>Parallèles</th><th>Sécantes</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

B.3 Droite/plan

On a un plan P et une droite d. La droite d est alors soit :
- incluse dans P (on notera $d \subset P$), *i.e.* tous les points de d sont aussi dans P. Alors $d \cap P = d$
- strictement parallèle à P. Alors : $d \cap P = \emptyset$.
- sécante en un point A de P. Alors : $d \cap P = A$.

En observant le cube, complète le tableau en notant l'intersection du plan P et de la droite d.

P \ d	(BF)	(EF)	(AD)
(ABC)			
(AFC)			
(ADG)			



Il sera important de savoir construire le point d'intersection d'une droite et d'un plan qui sont sécants. Pour cela on se ramène à l'intersection de deux droites. Voici deux exemples avec un tétraèdre $ABCD$:

1. (EF) et (BD) sont elles coplanaires ? ....

2. (EF) et (BD) sont elles sécantes en I ? ....

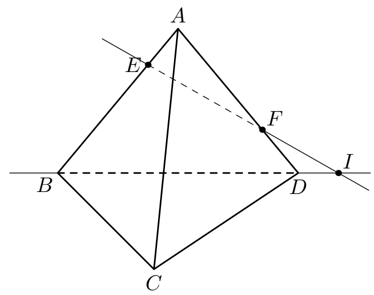
3. Justifions que $I \in (BCD)$:

$I \in (BD)$, et $(BD) \subset$ ...... donc $I \in$ ....

4. Justifions que I est le point d'intersection de la droite (EF) avec le plan (BCD) :

$I \in (BCD)$ et $I \in$ ...... donc $I \in (BCD) \cap \dots$

$E \notin (BCD)$ donc $(EF) \not\subset$ ...... Ainsi $(EF) \cap (BCD) =$



---

1. (EF) et (BD) sont elles coplanaires ? ....

2. (EF) et (BD) sont elles sécantes ? ....

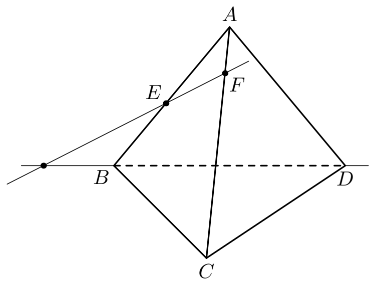
3. Construire $I = (EF) \cap (BCD)$. Justifier.

....

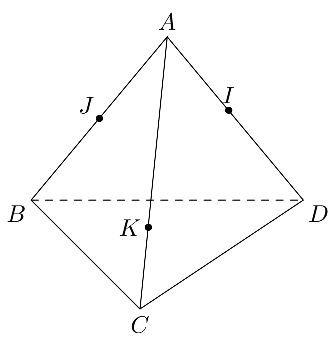
....

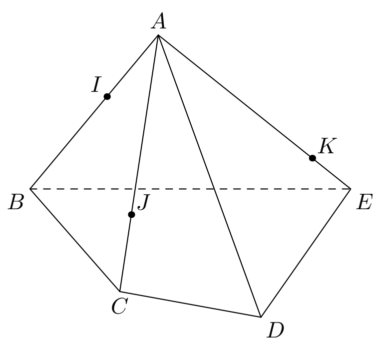
....

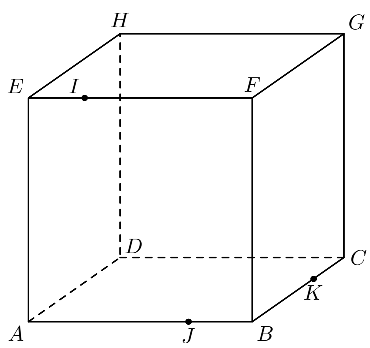
....



Quelques intersections . Déterminer l'intersection des droites et plans donnés.







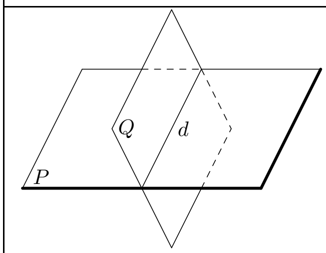
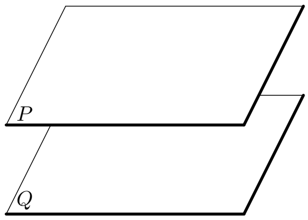
- $(IK) \cap (BCD)$
- $(JK) \cap (BCD)$

- $(IJ) \cap (BCD)$
- $(IK) \cap (BCD)$

- $(IJ) \cap (ADE)$ et $(IJ) \cap (BCG)$
- $(JK) \cap (ADE)$ et $(JK) \cap (CGH)$

B.4 Plan/plan

- Deux plans P et Q de l'espace peuvent être parallèles, ils sont alors confondus ($P = Q$ et donc $P \cap Q = P$) ou bien strictement parallèles c'est à dire $P \cap Q = \emptyset$.
- Deux plans P et Q non parallèles sont sécants et leur intersection est une droite.

Deux plans sécants	**Deux plans strictement parallèles**
	
$P \cap Q = d$	$P \cap Q = \emptyset$

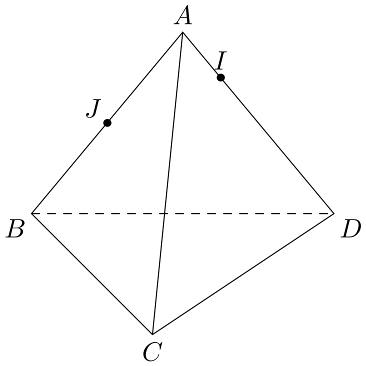
En observant le cube, complète le tableau en notant l'intersection du plan P et du plan Q.

P \ Q	(EBF)	(FGH)
(ABC)		
(ABH)		
(ADG)		
(AFC)		

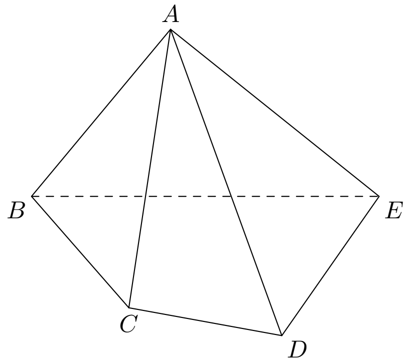
C Sections planes

Méthode : En pratique, pour déterminer l'intersection de deux plans sécants P et Q il suffit de déterminer deux points distincts M et N qui appartiennent aux deux plans P et Q. Alors $P \cap Q = (MN)$. Pour cela on cherche une droite d de P et une droite d' de Q qui sont sécantes (donc coplanaires !) en un point, disons M. On procède de même pour trouver un deuxième point N, puis on trace (MN).

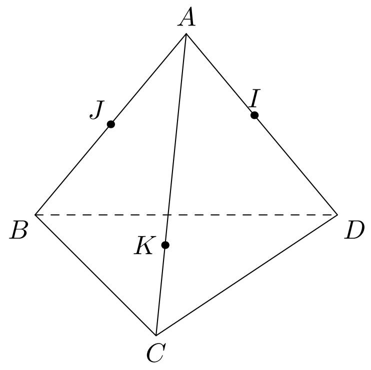
① Déterminer l'intersection de (CIJ) et (BCD).



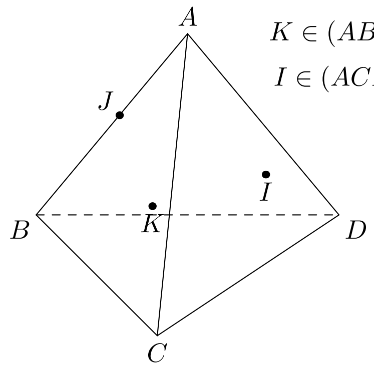
② Déterminer l'intersection de (ABC) et (ADE).



③ Déterminer l'intersection de (IJK) et (BCD).



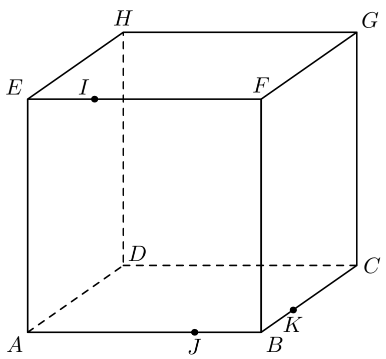
④ Déterminer l'intersection de (IJK) et (BCD).



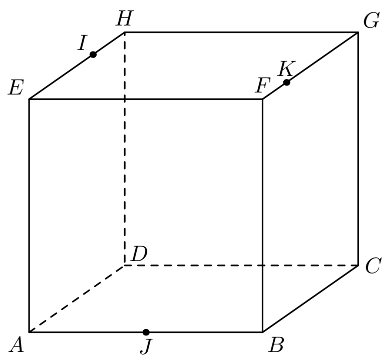
$K \in (ABC)$

$I \in (ACD)$

⑤ Déterminer l'intersection de (IJK) et (BCG), puis de (IJK) et (EFG).



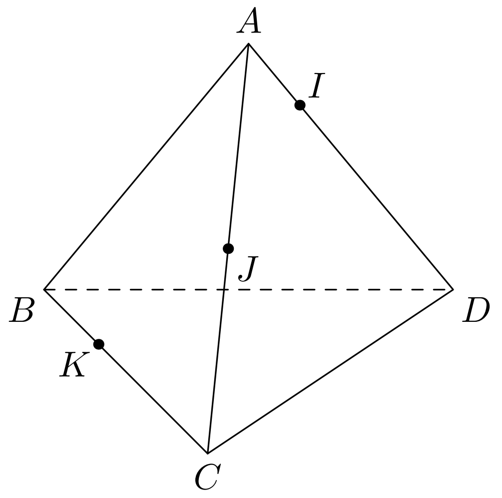
⑥ Déterminer l'intersection de (IJK) et (EFB), puis de (IJK) et (ADH).

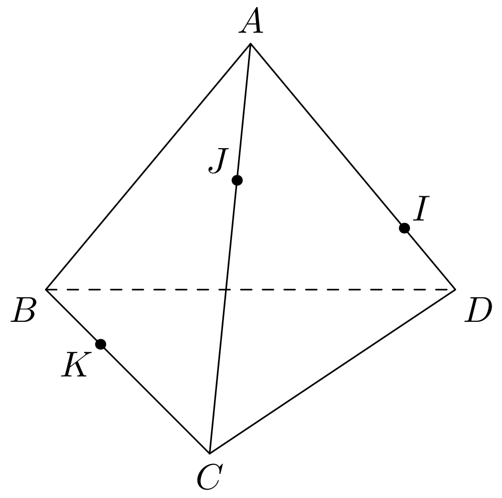


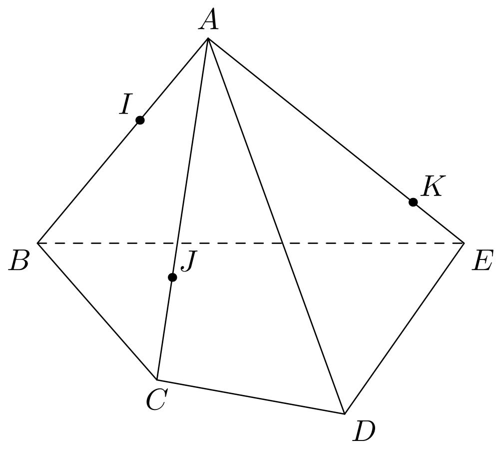
On peut maintenant appliquer les techniques vues précédemment pour déterminer la section d'un solide par un plan, c'est à dire l'intersection de ce plan avec les différentes faces du solide. Ces intersections sont des segments tracés sur les faces du solide. cf exemple pas à pas de la page suivante.

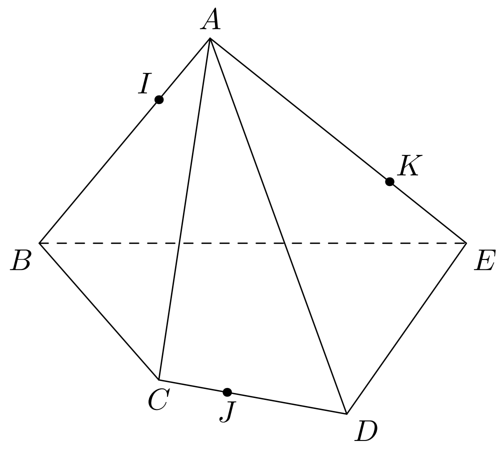
Méthode. On commence par relier les points du plan de coupe qui sont sur une même face du solide. Ensuite on cherche les intersections avec les faces restantes en commençant par celles sur lesquelles on a déjà un point du plan de coupe. On utilisera des constructions « hors solide » en cherchant les droites d'intersection du plan de coupe avec les différents plans contenant les faces du cube. À ce moment appelez moi pour une vérification et alors vous pourrez surligner en couleur la section du solide par le plan de coupe, en faisant attention a mettre des pointillés sur les faces cachées.

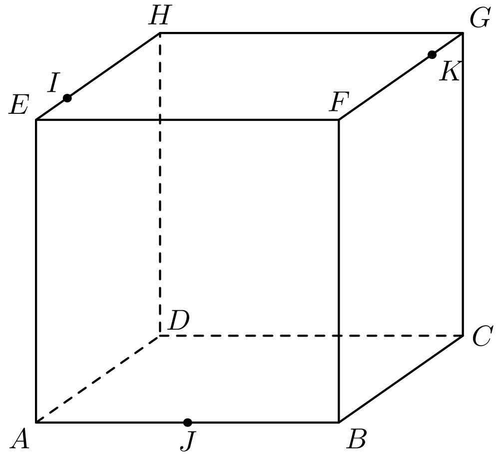
Commencez par repasser en couleur la section des solides ③, ④, ⑤ et ⑥ par le plan (IJK) sur la page précédente, puis déterminer les sections des six solides ci-dessous par le plan (IJK). On pourra se référer à l'expemple "Step by step" traité page 28.

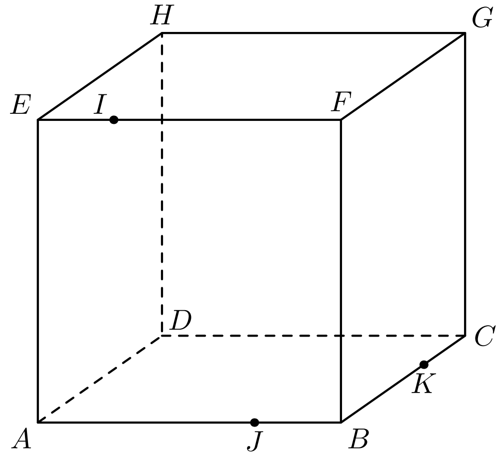

A
I
J
B
D
K
C

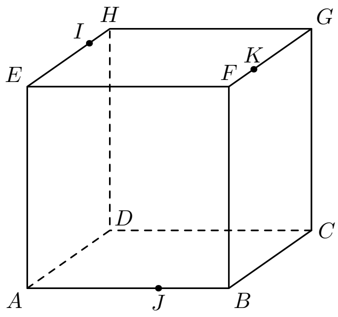

A
J
I
B
D
K
C


A
I
K
B
J
E
C
D

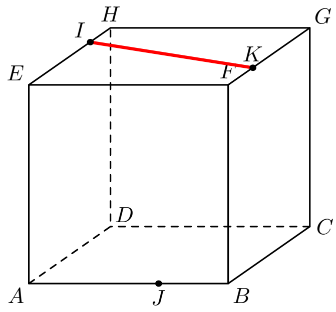

A
I
K
B
E
C
J
D


H
G
I
K
E
F
D
C
A
J
B

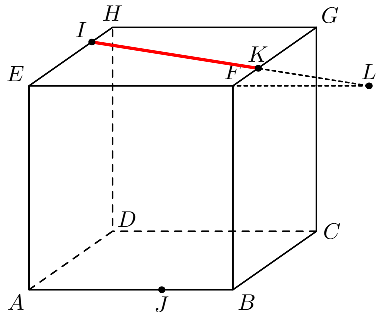

H
G
E
I
F
D
C
K
A
J
B



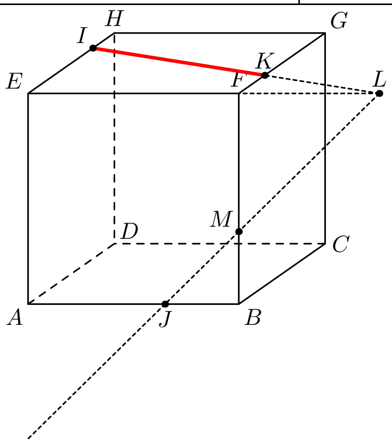
Déterminer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK).



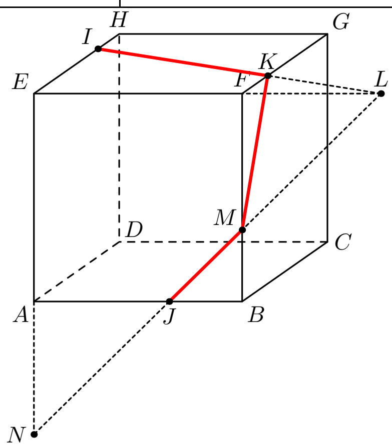
① On relie I et K qui sont sur la face du haut. On cherche ensuite l'intersection de (IJK) avec la face avant où on a déjà le point J.



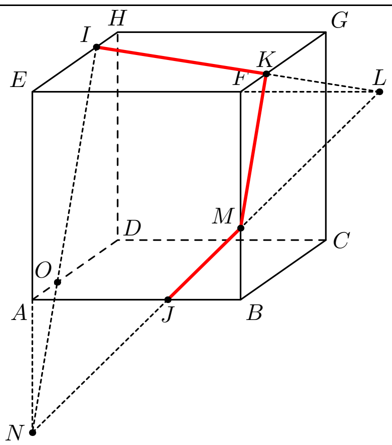
② (IK) et (EF) sont coplanaires dans (EFG). On note L leur point d'intersection. $L \in (IK)$ donc $L \in (IJK)$.



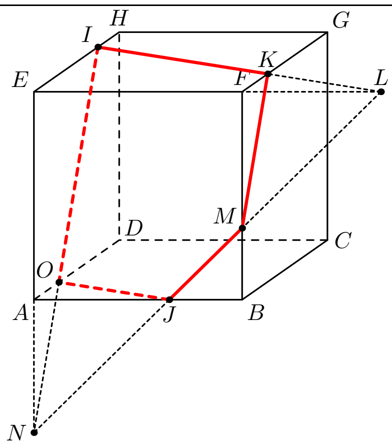
③ $L \in (EF)$ donc $L \in (EFB)$. La droite (JL) est donc tracée dans le plan (EFB). (JL) et (FB) sont donc coplanaires et se coupent au point noté M.



④ $M \in (JL)$ donc $M \in (IJK)$. Ainsi $[JM]$ et $[KM]$ constituent les intersections des faces avant et de droite par (IJK). On note $N = (JL) \cap (AE)$.



⑤ $N \in (JL)$ donc $N \in (IJK)$. Et $N \in (AE)$ donc $N \in (AEH)$. Ainsi I et N appartiennent à $(IJK) \cap (AEH)$. On trace donc (IN) dans (AEH). (IN) coupe $[AD]$ en O.



⑥ O appartient à (IJK) et aux faces de gauche et du bas, ainsi $[OI]$ et $[JO]$ sont les intersections de ces faces avec (IJK). La section du cube par le plan (IJK) est le pentagone $IKMJO$.

Chapitre VII

Probabilités.

Exercice n° 63

On lance 3 fois une pièce bien équilibrée.

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Quelle est la probabilité :
   a. d'avoir 3 faces ?
   b. que le 2^{e} jet soit face ?
   c. que le 3^{e} jet soit différent du 1er ?

Exercice n° 64

On lance deux dés à quatre faces numérotées 1, 2, 3, 4 et on additionne les points.

1. Donner l'ensemble des résultats possibles à l'aide d'un tableau à double entrée.
2. Donner la loi de probabilité pour la somme des points.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre multiple de trois ?

Exercice n° 65

Un groupe de 4 amis, Émile, Flore, Gaston et Hélène sont dans un bateau. Ils tirent au sort celui qui va ramer et, parmi les noms restants, celui qui va écoper.

1. Dresser un arbre pour cette situation.
2. Déterminer les probabilités suivantes.
   a. C'est un garçon qui rame.
   b. Hélène écope.
   c. Les deux qui travaillent sont de même sexe.

Exercice n° 66

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On considère les événements :

- C : « la carte tirée est un cœur »
- F : « la carte tirée est une figure »

1. Décrire par une phrase l'événement $C \cap F$. Combien compte-t-il d'issues ?
2. Décrire par une phrase l'événement $C \cup F$. Combien compte-t-il d'issues ?
3. Décrire par une phrase l'événement $\overline{C} \cap F$. Combien compte-t-il d'issues ?
4. Décrire par une phrase l'événement $\overline{C \cup F}$. Combien compte-t-il d'issues ?

Exercice n° 67

Deux épidémies sévissent en même temps dans un lycée, la gastro-entérite (abrégé en gastro.) et un rhume. On choisit un élève au hasard et on nomme :

- G l'événement « l'élève a la gastro. »
- R l'événement « l'élève a un rhume »

Décrire à l'aide de ces deux événements :

1. « l'élève a la gastro. et le rhume »
2. « l'élève a le rhume mais pas la gastro »
3. « l'élève a au moins une des maladies »
4. « l'élève n'a aucune des maladies »

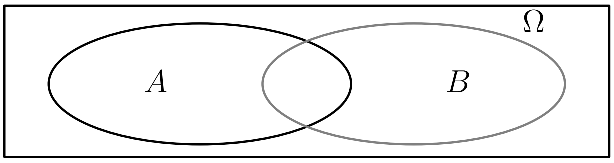
Exercice n° 68

A et B sont deux événements incompatibles avec $p(A) = 0,4$ et $p(B) = 0,22$.
Déterminer la probabilité des événements suivants : $\overline{A}$; $\overline{B}$ et $A \cup B$.

Exercice n° 69

Construire un diagramme de Venn (sur le modèle ci-dessous) pour chacun des événements suivants.

- $A \cap \overline{B}$
- $A \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B}$
- $\overline{A \cup B}$
- $\overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A} \cup \overline{B}$



Exercice n° 70

A et B sont deux événements tels que : $p(A) = 0,8$ et $p(B) = 0,53$.

1. A et B sont-ils incompatibles ?

2. Sachant que $p(A \cup B) = 0,95$, calculer : $p(A \cap B)$.

Exercice n° 71

Soit S et T deux événements tels que : $p(S) = 0,5$; $p(T) = 0,6$; $p(S \cup T) = 0,9$. Calculer les probabilités suivantes : $p(S \cap T)$; $p\left(\overline{S \cup T}\right)$ et $p\left(\overline{S \cap T}\right)$.

Exercice n° 72

Soit A et B deux événements tels que : $p(A) = 0,7$; $p(B) = 0,5$; et $p(A \cap B) = 0,3$. Calculer : $p\left(\overline{A}\right)$; $p(A \cup B)$ et $p\left(\overline{A} \cap B\right)$

Exercice n° 73

On considère 2 événements V et F tels que : $p(V) = 0,4$; $p(F) = 0,3$ et $p(V \cup F) = 0,8$. Aïssatou prétend que ce n'est pas possible. Confirmer ou infirmer sa déclaration.

Exercice n° 74

Le standard d'un cabinet médical dispose de deux lignes de téléphone. On considère les événements :

- O_1 : « La 1er ligne est occupée ».
- O_2 : « La 2e ligne est occupée ».

Une étude statistique montre que :

- $p(O_1) = 0,4$
- $p(O_2) = 0,3$
- $p(O_1 \cap O_2) = 0,2$

Calculer la probabilité des événements suivants.

1. « La ligne 1 est libre ».

2. « Au moins une des lignes est occupée ».

3. « Au moins une des lignes est libre ».

Exercice n° 75

Une entreprise fabrique des ordinateurs portables. Ils peuvent présenter deux défauts :

- un défaut de clavier ;
- un défaut d'écran.

Sur un grand nombre d'ordinateurs, une étude statistique montre que :

- 2% présentent un défaut d'écran ;
- 2,4% présentent un défaut de clavier ;
- 1,5% présentent les deux défauts.

1. On choisit au hasard un ordinateur et on considère les événements suivants.
- E : « L'ordinateur présente un défaut d'écran » ;
- C : « L'ordinateur présente un défaut de clavier ».

Détermine $p(E)$, $p(C)$ et $p(E \cap C)$.

2. On considère les événements suivants.
- « L'ordinateur présente au moins un défaut » ;
- « L'ordinateur ne présente que le défaut d'écran ».

a. Traduire ces deux événements à l'aide de E et C.

b. Calcule leur probabilité.

Chapitre VIII

Vecteurs et coordonnées.

Exercice n° 76 ——————————————————— 🕮

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points :

$$A(-5;4);\quad B(0;6);\quad C(4;2);\quad D(1;-2)$$

1. Les droites (AB) et (CD) sont elles parallèlles ?

2. Les droites (BC) et (AD) sont elles parallèlles ?

3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice n° 77 ——————————————————— 🕮

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points :

$$A(-6;-1);\quad B(-2;4);\quad C(2;3);\quad D(-2;-2)$$

1. Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.

2. $ABCD$ est il un losange ?

3. ★ Déterminer les coordonnées du point E tel que $ADBE$ soit un parallélogramme.

Exercice n° 78 ——————————————————— 🕮

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points :

$$A(-6;2);\quad B(-2;3);\quad C(3;4);\quad D(13;6)$$

1. Les points A, B et C sont ils alignés ?

2. Les points B, C et D sont ils alignés ?

3. Les points A, B et D sont ils alignés ?

Exercice n° 79 — Annales du brevet des collèges ——————————— 🕮

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'unité étant le centimètre, on considère les points :

$$\mathrm{A}(8\ ;\ 1);\quad \mathrm{B}(4\ ;\ 8) \text{ et } \mathrm{C}(-4\ ;\ 7)$$

1. A, B, C sont ils alignés ?

2. a. Donner sans justifier les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ et celles du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère OABC ?

3. Démontrer que OABC est un losange.

4. Déterminer les coordonnées $(x; y)$ du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Exercice n° 80 — Annales du brevet des collèges

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, l'unité étant le centimètre, on considère les points :

$$A(2;3); \quad B(5;6); \quad C(7;4); \quad D(4;1)$$

Partie A.

1. Faire la figure. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et celles du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

2. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

3. Calculer AC et BD.

4. Démontrer que ABCD est un rectangle.

Partie B.

1. Déterminer les coordonnées de E le symétrique de B par rapport à C ainsi que celles de F le symétrique de D par rapport à C.

2. Démontrer que BDEF est un parallélogramme.

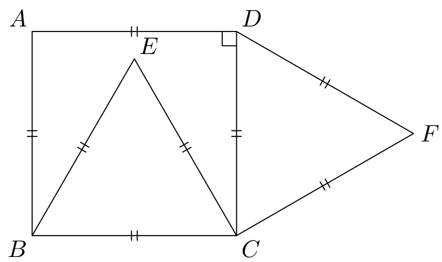
Exercice n° 81 — Fil rouge

Le but de ce problème est de montrer que les points A, E, et F sur la figure sont alignés.

1. Donner sous forme de fraction les coordonnées de A, E et F dans le repère $(B; C; A)$.

2. Déterminez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$

3. Conclure le problème.



Dans ce chapitre, je dois savoir...

1. calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ si on me donne les coordonnées de A et de B.

2. savoir dire si deux vecteurs sont colinéaires en calculant par exemple leur déterminant.

3. déterminer si des points sont alignés ou des droites sont parallèles par des calculs de coordonnées de vecteurs puis d'un déterminant.

4. dire si un quadrilatère dont on connait les coordonnées des sommets est un parallélogramme.

5. traduire analytiquement (avec les coordonnées) l'égalité de deux vecteurs.

Chapitre IX

Polynômes du second degré.

Exercice n° 82 Différentes écritures

Pour chaque polynôme f vous devez le mettre sous forme canonique puis le factoriser si possible et enfin résoudre l'équation $f(x) = 0$

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

2. $f(x) = x^2 + 4x - 5$

3. $f(x) = x^2 - 6x + 10$

4. $f(x) = 2x^2 - 20x + 1$

5. $f(x) = x^2 + x + 1$

6. $f(x) = x^2 - x - 2$

Exercice n° 83

Déterminer un polynôme du second degré P qui satisfait les conditions demandées :

1. P a un minimum de -2 atteint en 3.

2. P a un maximum de 5 atteint en 7.

3. P a un minimum de 6 atteint en -3.

4. P a un maximum de 8 atteint en π.

5. P s'annule en 1 et en 2.

6. P s'annule en -3 et en 0.

Exercice n° 84

Dresser le tableau de variation des polynômes suivants sur $\mathbb{R}$.

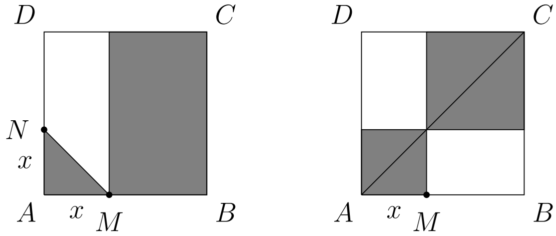
$$P(x) = x^2 + x + 1\,; \qquad Q(x) = -3x^2 + 6x - 7\,; \qquad R(x) = (2x-3)(4-x).$$

Exercice n° 85

Mr Morris owns a restaurant where you can only order a \$12 menu. Each week he has 550 clients. One day he decides to raise the price of the menu by \$1. Immediately he loses 20 clients in the week. But he raises again the price by another dollar and loses 20 more clients. He even tries to raise the price by half a dollar and then loses 10 clients. After a thought he realises that the number of clients he loses might be proportional to the amount by which he raises his menu. So he decides to do the maths to find out the best price for his menu so that he earns the most. Unfortunately Mr Morris didn't pay too much attention in math at school and he is unable to do it, can you help him out ?

Exercice n° 86

$ABCD$ est un carré de côté 1. Le point M appartient au segment $[AB]$; on pose $x = AM$ et on note $f(x)$ l'aire grisée.
Déterminer les variations de la fonction f sur $[0; 1]$ dans chacun des deux cas dessinés ci-contre.

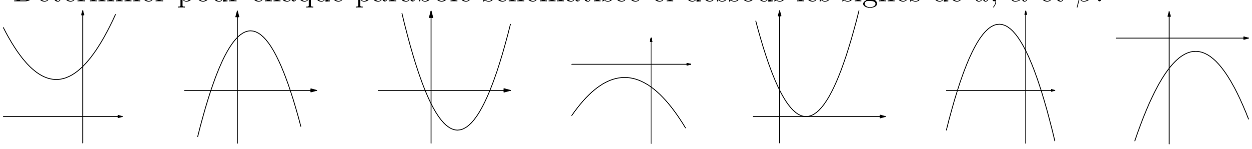


Exercice n° 87 — Les pierres Okaré ™

Les pierres Okaré ™ sont des pierres précieuses dont la valeur (en euros) est égale au carré de leur masse (en grammes). On a malencontreusement laissé choir une pierre Okaré ™ de 8 grammes : elle s'est alors brisée en deux morceaux. Soit x la masse (en grammes) de l'un de ces deux morceaux. Dans quel intervalle varie x ? Déterminer les variations de $f(x)$ représentant la valeur totale des deux morceaux, déterminer dans quels cas cette valeur est maximale ou minimale.

Exercice n° 88 — Observer une parabole

Déterminer pour chaque parabole schématisée ci-dessous les signes de a, α et β.



a : +
α : −
β : +

Dans ce chapitre, je dois savoir...

1. développer une expression du type $-2(3x-2)(-2x+5)$
2. factoriser avec $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ des expressions comme : $(2x-3)^2 - 16$ ou $(x+\frac{1}{2})^2 - 5$
3. prouver en développant chaque expression séparément que si $f(x) = (2x-3)(x+4)$ alors on a aussi $f(x) = 2(x+\frac{5}{4})^2 - \frac{49}{2}$
4. déterminer la forme canonique d'expressions simples avec $a = 1$ comme $x^2 - 4x + 3$ ou $x^2 + x - 3$
5. lire sur la forme canonique comme $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$ que f admet un maximum de 4 en 3. De même pour un minimum si $a > 0$
6. donner le tableau de variation complet d'un polynôme donné sous forme développé comme $-3x^2 + 12x - 5$ en identifiant a, son signe, puis en calculant $-b/2a$ et son image par f.
7. faire un exercice de mise en équation avec une variable x et déterminer une fonction à optimiser. (cf exercices 85, 87 et 86)

Chapitre X

Équations de droites et systèmes.

A Équations cartésiennes de droites.

Exercice n° 89

On se place dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points $A(-3;1)$, $B(2;5)$, $C(2;-3)$. Déterminer une équation cartésienne puis l'équation réduite des trois droites (AB), (BC) et (AC). Rappel : $M(x;y) \in (AB) \Longleftrightarrow det(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB}) = 0$

Exercice n° 90

On se place dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer l'équation réduite des droites dont on donne une équation cartésienne :

$$\mathscr{D}_1 : \quad 2x - 3y + 5 = 0 \qquad \mathscr{D}_2 : \quad -x + 2y - 7 = 0 \qquad \mathscr{D}_3 : \quad 5x - 6y + 1 = 0$$

2. On considère les points $A(-2;1)$, $B(3;4)$, $C(3;-5)$ et la droite Δ d'équation cartésienne : $3x - 2y + 2 = 0$.
   Déterminer dans chaque cas une équation cartésienne puis une équation réduite de la droite…
   - **a.** Passant par A et B.
   - **b.** Passant par B et C.
   - **c.** Passant par A et parallèle à Δ.
   - **d.** Passant par C et parallèle à (AB).

B Systèmes d'équations linéaires.

Exercice n° 91

On se place dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour chaque couple d'équation donnée, tracer les deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dans un même repère et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection, puis déterminer les valeurs exactes de ces coordonnées par le calcul.

1. $\mathscr{D} : \quad 2x - y + 3 = 0$ et $\mathscr{D}' : \quad x + 3y + 2 = 0$
2. $\mathscr{D} : \quad 2x + y - 2 = 0$ et $\mathscr{D}' : \quad x - 2y - 1 = 0$
3. $\mathscr{D} : \quad 3x - 4y - 1 = 0$ et $\mathscr{D}' : \quad 5x + 3y + 1 = 0$

Exercice n° 92

Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} 2x-3y = -5 \\ -x+6y = 4 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} 3x-5y = 8 \\ x+2y = 3 \end{cases}$$

Exercice n° 93

L'entrée d'un musée coûte 1,50€ pour les moins de 18 ans et 2€ pour les adultes. 110 personnes visitent ce musée pour une recette de 198€. Trouvez et résolvez le système qui permet de déterminer le nombre de clients de moins de 18 ans et d'adultes.

Exercice n° 94

Plusieurs amis veulent offrir un cadeau à Maurice. Si chacun verse 20€, il manque 12€ . Si chacun verse 25€ , il y a 18€ de trop.

Quelles questions peut-on se poser ? Répondre à ces questions.

Exercice n° 95

Simone fait la moyenne de ses notes de mathématiques et de français, elle obtient 10,5 sur 20. Si elle avait eu le double en mathématiques et 1 point de plus en français, cette moyenne aurait été de 15 sur 20. Déterminez puis résolvez le système qui permet de trouver ses notes.

Exercice n° 96

Pour trouver l'équation réduite de la forme $y = mx+p$ d'une droite passant par deux points dont on connait les coordonnées, on peut aussi résoudre un système dont les inconnues sont m et p. Procédez ainsi pour trouver l'équation de la droite (AB) lorsque :

1. $A(2;1)$ et $B(-4;4)$

2. $A(2;2)$ et $B(5;6)$

Exercice n° 97

The *Fantastic Five* stopped one day by a fancy bar called « Chez Maurice » and ordered two *caffè latte* and three root beers and payed nine dollars. Two of them didn't enjoy the root beer so much so the next day, they ordered a *caffè latte* instead while the others sticked to their previous drink. That time they all apreciated their drinks and only paid eight dollars. If you are as smart as *Reed Richards* aka *Mr. Fantastic*, you should be able to find the question raised by this situation and the answer in only 0.042 μs

Chapitre XI

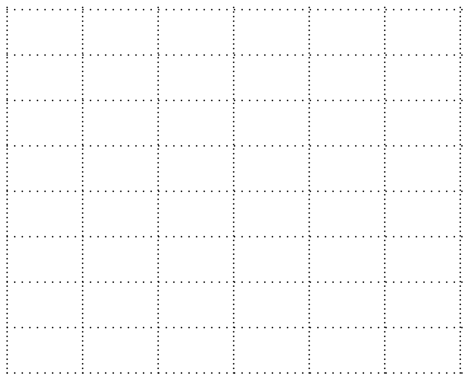
Variations des fonctions

Exercice n° 98

Soit f une fonction, dont le tableau de variations sur l'intervalle $[-1;5]$ est le suivant :

x	-1		1		2		5
$f(x)$			2				4
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	-3				-4		

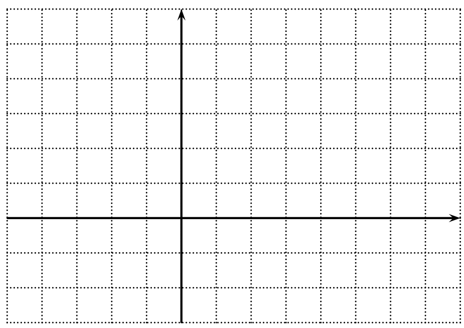
1. Quelle est l'image de 2 par f ?
2. A-t-on : $f(0) > f(2)$, $f(0) < f(2)$ ou bien la déduction est-elle impossible ? Justifier la réponse.
3. De même, comparer si possible les couples de nombres suivants avec <, > ou ?
   ① $f(0) \ldots f(1)$ ③ $f(3) \ldots f(4)$
   ② $f(1) \ldots f(4)$ ④ $f(1,1) \ldots f(2,1)$
4. Tracer une courbe possible de la fonction f sur le quadrillage ci-contre.



Exercice n° 99

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5 ; 8]$. On sait que la courbe passe par les points $A(-5 ; 1)$, $B(-1 ; 3)$, $C(3 ; 4)$, $D(6 ; 3)$ et $E(8 ; -1)$.

1. Placer ces points dans un repère du plan.
2. Tracer une courbe pouvant représenter f sachant que :
   - f est strictement croissante sur $[-5 ; 3]$;
   - f est strictement décroissante sur $[3 ; 8]$.
3. Quel est l'image de 3 ?
4. 3 a-t-il des antécédents ? Si oui, lesquels ?
5. Peut-on tracer une autre courbe respectant les conditions données ?



Exercice n° 100 – Vrai ou Faux ou. . .

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 5]$:

x	-5		-1		2		5
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	6

Pour chaque proposition, cocher la bonne réponse (V : vrai ; F : faux ; RI : les renseignements sont insuffisants pour pouvoir conclure).

Proposition	V	F	RI
$f(2) = -1$	☐	☐	☐
f est croissante sur $[-5; 5]$	☐	☐	☐
-4 admet un antécédent par f	☐	☐	☐
$f(-2) > 0$	☐	☐	☐
$f(0) \leqslant 0$	☐	☐	☐
1 peut admettre 3 antécédents par f	☐	☐	☐
$f(-3) \leqslant f(4)$	☐	☐	☐
Le maximum de f est 5	☐	☐	☐
f est croissante sur $[0; 2]$	☐	☐	☐
$f(0) < f(1)$	☐	☐	☐

Exercice n° 101 — Formalisation de la notion de sens de variation

1. Soit f une fonction croissante sur $[-5; 10]$.
   - **a.** Compléter avec $>$ ou $<$: $f(2) \ldots f(3)$; $f(-2) \ldots f(-3)$; $f(-5) \ldots f(5)$
   - **b.** Plus généralement, si a et b sont deux nombres dans $[-5; 10]$ tels que $a < b$, comparer leurs images :

     . . . .
2. Soit f une fonction décroissante sur $[-5; 10]$.
   - **a.** Compléter avec $>$ ou $<$: $f(2) \ldots f(3)$; $f(-2) \ldots f(-3)$; $f(-5) \ldots f(5)$
   - **b.** Si a et b sont deux nombres dans $[-5; 10]$ tels que $a < b$, comparer leurs images :
3. Si f est une fonction définie sur $[-2; 3]$ telle que $f(-2) < f(3)$, peut-on dire que f est croissante sur $[-2; 3]$? Peut-on dire que f est décroissante sur $[-2; 3]$?
4. Si f est une fonction définie sur $[-2; 3]$ telle que $f(-2) < f(-1) < f(0) < f(1) < f(2) < f(3)$, peut-on dire que f est croissante sur $[-2; 3]$? Peut-on dire que f est croissante sur $[-2; -1]$?
5. Compléter alors la définition d'une fonction croissante sur $[-2; 3]$:
   La fonction f est croissante sur $[-2; 3]$ signifie : quels que soient les réels a et b de $[-2; 3]$

   . . . .

Exercice n° 102 — Le tour du carré

Soit $ABCD$ un carré de côté 4.
Un point M décrit le contour constitué des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ dans le sens $A \to B \to C \to D \to A$.
On appelle x la distance parcourue par M.

1. Que vaut x quand M est en A ? en B ? en C ? en D ? en A (à la fin du trajet) ?
2. Soit O le centre du carré $ABCD$ et f la fonction donnant OM en fonction de x.
   - **a.** Calculer $f(x)$ quand x vaut 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14.

b. Sans calculer $f(x)$ dans le cas général, former le tableau de variations de f en utilisant les propriétés géométriques de la figure.

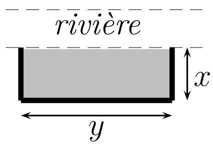
c. Quel est le minimum de f ? Pour quelles valeurs de x est-il atteint ?

d. Quel est le maximum de f ? Pour quelles valeurs de x est-il atteint ?

e. Donner le nombre d'antécédents de 3 puis de $2,5$.

Exercice nº 103 — Maurice et son enclos.

Maurice dispose de 20m de grillage avec lequel il veut délimiter une parcelle de pré de forme rectangulaire le long d'une rivière. Comme ses bêtes n'iront pas traverser la rivière, il ne mettra pas de grillage le long de la rivière (cf figure). Maurice voudrait connaître les dimensions de ce rectangle pour que la surface du rectangle ainsi délimité soit la plus grande possible.



On note x la longueur (en mètres) du côté du rectangle perpendiculaire à la rivière, et y pour l'autre.

1. Dans quel intervalle peut varier x ?

2. Prouver que l'aire $A(x)$ de la parcelle en fonction de x vérifie : $A(x) = 2x(10 - x)$

3. Tracer la courbe de la fonction A sur votre calculette.

4. Quelle semble alors être la réponse attendue pour le problème de Maurice ?

5. **Preuve par le calcul**

a. Prouver que pour tout x, on a la formule : $A(x) = -2(x-5)^2 + 50$

b. En déduire que pour tout x, on a : $A(x) \leqslant A(5)$.

c. Conclure le problème et faire une figure.

Exercice nº 104 — Les pierres Okaré

Les pierres Okaré™ sont des pierres précieuses dont la valeur (en euros) est égale au carré de leur masse (en grammes). On veut savoir si on a intérêt à casser une pierre Okaré™ en deux pour lui faire gagner de la valeur. On a une pierre Okaré™ de 8 grammes et imaginons qu'on la brise en deux morceaux. Soit x la masse (en grammes) de l'un de ces deux morceaux.

1. Donner l'expression de $f(x)$ qui représente la valeur totale des deux morceaux en euros.

2. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire

$$f(x) = 2(x-4)^2 + 32.$$

3. Prouver que f admet un minimum en $x = 4$.

4. **a.** Soit a et b deux réels, prouver que :

$$f(a) - f(b) = 2(a+b-8)(a-b)$$

b. En déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[0;4]$ et $[4;8]$.

Rappel de la méthode. On commence ainsi : Soit a et b dans $[0;4]$ avec $a < b$.
Objectif : comparer $f(a)$ et $f(b)$, c'est à dire connaitre le signe de $f(a) - f(b)$.

c. Donner alors le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;8]$.

5. Justifier qu'une pierre Okaré™ perd de la valeur lorsqu'elle est brisée en deux morceaux. Dans quel cas perd-on le plus d'argent en la brisant ?

La page des défis.

Exercice n° 105 — Immatriculations

Combien de plaques d'immatriculations différentes peut on réaliser sous le format français :

$\boxed{\text{Deux lettres - Trois chiffres - Deux lettres.}}$

Combien de plaques ne comportent qu'un seul chiffre et une seule lettre ?

Exercice n° 106 — Une inégalité iso-périmétrique

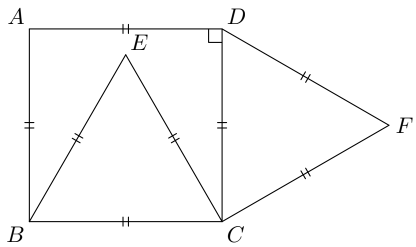
1. Soit un rectangle de périmètre p. Prouver que son aire est inférieure à celle d'un carré de même périmètre p.

2. Prouver qu'un carré de périmètre p a une aire inférieure à celui d'un disque de circonférence p.

Exercice n° 107 — Fil rouge

Le but de ce problème est de montrer que les points A, E, et F sur la figure sont alignés.

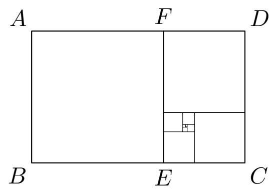
Sauriez vous prouver ce résultat uniquement par des calculs d'angles (sans utiliser que l'angle $\widehat{AEF}$ est plat puisque c'est le but !)



Exercice n° 108 — Couverture

A. Observations. Observe bien la couverture de ce livret. Que remarques-tu ? Essaye de la reproduire. Est-il possible qu'il y ait une infinité de carrés dans le grand rectangle ? Par combien (environ) faut-il multiplier la largeur du rectangle pour obtenir sa longueur ? Même question avec les autres rectangles plus petits qui apparaissent dans la figure.

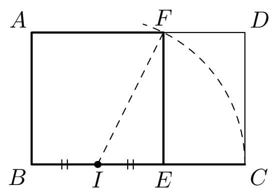
B. Calcul. On cherche un rectangle $ABCD$ de largeur $AB = 1$ tel que lorsqu'on a tracé le carré $ABEF$, le petit rectangle $CDFE$ « a la même forme » que $ABCD$ c'est à dire le même rapport longueur sur largeur. On cherche donc AD tel que : $\dfrac{AD}{AB} = \frac{DC}{EC}$



1. On pose $AD = x$, prouver qu'on a : $x^2 - x - 1 = 0$

2. Développer $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ puis en déduire que $ABCD$ doit avoir un rapport $\frac{AD}{AB}$ qui vaut le nombre d'or noté par la lettre grecque φ (phi), à savoir : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. Construction. $ABEF$ est un carré de côté 1. On a placé I milieu de $[BE]$ et tracé l'arc de cercle de centre I passant par F qui coupe $[BE)$ en C. Enfin on a placé D tel que $ABCD$ soit un rectangle. Prouver que cette construction donne bien le rectangle d'or, c'est à dire que : $BC = \varphi$.



D. Propriétés de φ. On a $\varphi^2 = \varphi + 1$. En déduire que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1$. Justifier les écritures :

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \qquad \text{et} \qquad \varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Chapitre XII

Fonctions homographiques.

Exercice n° 109

Parmi les fonctions suivantes, dire lesquelles sont homographiques.

1. $f(x) = (2x-1)(x+2)$
2. $g(x) = \dfrac{7}{2x-1}$
3. $h(x) = \dfrac{4x+1}{5x+2}$
4. $i(x) = 4 + \dfrac{x-1}{x-2}$
5. $j(x) = \dfrac{3x-1}{(3x-2)^2}$
6. $k(x) = \dfrac{3x-1}{7x-9} - \dfrac{3-x}{7x-9}$

Exercice n° 110

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) les fonctions suivantes ne sont pas définies et pour quelle(s) valeur(s) elle s'annulent.

1. $f(x) = \dfrac{-2x+1}{-5x+1}$
2. $g(x) = \dfrac{5x+3}{4x-3}$
3. $h(x) = 2 + \dfrac{3x-1}{4x-7}$
4. $k(x) = \dfrac{\sqrt{3}x - \sqrt{6}}{2\sqrt{3} - \sqrt{27}x}$
5. $l(x) = \dfrac{-2x+1}{-9x^2+1}$
6. $m(x) = \dfrac{69x+3}{6x^2+24}$

Exercice n° 111

Établir le tableau de signes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \dfrac{-x}{x+12}$
2. $g(x) = \dfrac{2x-5}{7+21x}$
3. $h(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$
4. $k(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+2}$
5. $m(x) = \dfrac{(x-1)(2x+1)}{1-9x}$
6. $p(x) = \dfrac{5+x}{(x-6)(7x+8)}$

Exercice n° 112

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x+2}{-4x+1} > 0$
2. $\dfrac{5x-1}{-3x} \geqslant 0$
3. $\dfrac{7x-3}{(-8x-1)^2} < 0$
4. $\dfrac{3x-4}{x+2} \leqslant 0$

Exercice n° 113

En exprimant différemment le membre de gauche, résoudre les inéquations suivantes :

1. $2 - \dfrac{x-4}{3x+5} \geqslant 0$
2. $\dfrac{5x+1}{x-1} + 1 < 0$
3. $\dfrac{2x^2-9}{x-1} - 2x \geqslant 0$
4. $\dfrac{7}{x-2} - \dfrac{4x-5}{(x-2)^2} < 0$
5. $\dfrac{8x^2-9}{x+1} - 8x \geqslant 0$
6. $\dfrac{2x+1}{(x+3)^2} - \dfrac{2}{x+3} > 0$

Exercice n° 114 Signes et variations ★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}.$$

1. Conjecturer le sens de variations de f.
2. Vérifier que $f(b) - f(a) = \dfrac{5(a-b)}{(b-2)(a-2)}$.
3. Soit a et b deux nombres réels tels que $2 < a < b$. Étudier le signe de $f(b) - f(a)$.
4. Démontrer que f est décroissante sur $]2; +\infty[$.

Exercice n° 115 Signes et variations (bis) ★

En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer que

1. $f(x) = \dfrac{-3}{(x-5)^2}$ est strictement croissante sur $]5; +\infty[$.
2. $g(x) = 3(x+2) - \dfrac{2}{x}$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.