Définition 1. Soit $a \in I$ où I est un intervalle *ouvert*. Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable en a si le taux de variation de f entre a et $a+h$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. Si cette limite finie existe, on l'appelle le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

Remarque. En posant $x = a+h$, cette définition équivaut à : $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$

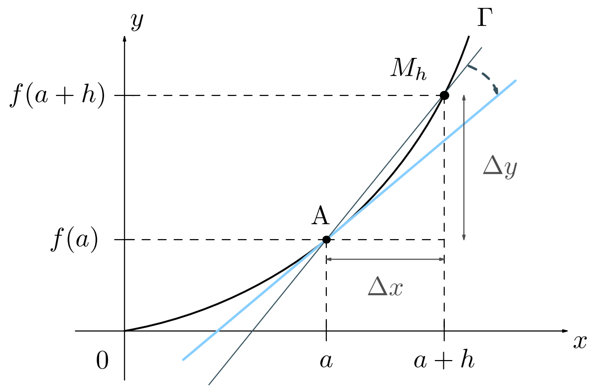
Interprétation graphique

Avec les notations du graphique, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Quand h tend vers zéro le point M_h se rapproche du point A. Dire que f est dérivable en a signifie que la sécante (AM_h) admet une position limite. On appelle alors tangente à la courbe de f au point d'abscisse a, la droite T_a passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$. Ainsi l'équation réduite de T_a est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$



Autour du point A, la courbe de f et sa tangente T_a sont « très proches ». D'où la propriété :

Propriété 1 (Approximation affine)**.** *Si f est dérivable en a, et que h est proche de zéro :* $\boxed{f(a+h) \simeq f(a)+hf'(a)}$. *Ou encore, si x est proche de a, on a :* $\boxed{f(x) \simeq f(a)+(x-a)f'(a)}$

Démonstration. La définition 1 signifie que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)+\varepsilon(h)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0. D'où le résultat, qui consiste à négliger le terme $h\varepsilon(h)$. L'autre expression vient en posant $x = a+h$. □

Notation différentielle et sciences physiques

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, c'est à dire dérivable en tout réel a à l'intérieur de I. Alors en mathématiques, on note f' la fonction dérivée de f, mais pas en physique... Comme :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Lorsque le Δx est infiniment petit, on le note $\mathrm{d}x$. De même le Δy devient $\mathrm{d}y$. En physique, au lieu de noter f' on notera alors $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. De plus, en physique, la variable est souvent le temps, donc noté t au lieu de x. On a donc : $f : t \longmapsto f(t)$. Si on dérive à nouveau f' on obtient la dérivée *seconde* de f notée f''. Si on redérive cette dernière on obtient f''' que l'on note aussi $f^{(3)}$, ainsi de suite, $f^{(4)}$ désigne la dérivée quatrième de f. Avec la notation différentielle utilisée en physique, celà donne :

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \qquad f'' = (f')' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$$

Remarquez comme l'opération « dériver par rapport à t » se comporte avec cette notation comme si on multipliait par l'opérateur : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

Pour embrouiller un peut plus, la fonction en physique est souvent notée x. $x(t)$ représente typiquement l'abscisse d'un point mobile en fonction du temps t. La vitesse moyenne du point entre les temps t_1 et t_2 est alors :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

La vitesse instantanée est alors la limite de $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro, c'est donc : $x'(t)$, euh... pardon $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Mais les physiciens aussi feignants que les mathématiciens on trouvé une notation plus courte $\dot{x}$ qui désigne donc la vitesse v. De même vous savez (ou apprendrez) que l'accélération est la dérivée de la vitesse. On a alors :

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x' \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Comment note–t–on alors la vitesse instantanée au temps t_1 ? En maths ce serait $x'(t_1)$, en physique il y a trois notations possibles :

$$\dot{x}(t_1) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)(t_1) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_1}$$