La première démonstration de l'histoire

Un peu d'histoire : Pythagore a créé au V^e siècle avant notre ère, une école de mathématiciens appelée celle des Pythagoriciens. Ils formaient une sorte de secte et étaient voués au secret. Leurs recherches portaient sur les nombres et la géométrie. En plus d'être mathématiciens ils étaient philosophes (c'est même Pythagore qui a inventé ce mot), et pour eux, « tout est nombre » . Pour les Grecs, les « nombres » sont en fait les rationnels positifs (les fractions d'entiers naturels). Ayant découvert le théorème de Pythagore, ils prouvèrent :

Propriété 1. *Soit un carré de côté a, le rapport* $\dfrac{\textit{diagonale}}{\textit{côté}}$ *est un nombre qui élevé au carré vaut 2.*

Ils réussirent à prouver qu'un tel rapport ne pouvait pas être une fraction d'entiers, c'est à dire ne pouvait pas être un « nombre »[1]. Je vous propose de retrouver cette démonstration historique :

Préliminaires

1. Qu'est–ce qu'un nombre pair ? Qu'un nombre impair ? En citer trois de chaque.

2. Opérer la division euclidienne de chacun de vos nombres, par 2.
Une définition des nombres pairs et impairs est par exemple :

- Un nombre pair est un entier naturel de la forme : $2k$ où $k \in \mathbb{N}$.
- Un nombre impair est un entier naturel de la forme : $2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$.

3. Prouver avec ces définitions la propriété suivante :

Propriété 2. *Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.*

4. En déduire sans calcul la propriété suivante qui sera ensuite la clef de la démonstration :

Propriété 3. *Soit* $a \in \mathbb{N}$. *Si* a^2 *est pair alors* a *est pair.*

On va faire un raisonnement par l'absurde. Le raisonnement par l'absurde est un type de raisonnement logique. Il permet d'établir la vérité d'une proposition en montrant que son contraire conduit à une contradiction, ou absurdité.

Principe de la démonstration

Ici, pour démontrer que racine de 2 est irrationnel, on va supposer au contraire que :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \qquad (1)$$

où p et q sont des entiers naturels non nuls et que la fraction $\frac{p}{q}$ est *irréductible*. Après un raisonnement, on va aboutir à une contradiction, ce qui prouvera que ce n'est pas possible.

---

1. Justifier que à partir de (1) que :

$$p^2 = 2q^2 \qquad (2)$$

2. Le nombre p^2 est-il pair ou impair ? Qu'en déduit–on pour p ?

3. On pose donc $p = 2k$ où k est un entier naturel. En remplaçant dans (2) prouver que le nombre q^2 est pair.

4. Justifier que la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.

5. Conclure la démonstration en reprenant proprement le raisonnement.

Bonus : Sauriez vous démontrer la propriété 1 ?

[1] Cette découverte mettait en péril la base de leur philosophie, à tel point, que le premier Pythagoricien qui a révélé ce secret–Hippase de Métaponte–aurait été jeté à la mer.