

Soit cinq segments, dont le plus long ne dépasse pas la somme des longueurs des deux plus courts. On peut donc former dix triangles en choisissant n'importe quels des trois segments comme côtés. Démontrer qu'au moins un de ces dix triangles a trois angles aigus.

**Solution :** .....  
Je vais utiliser la propriété suivante :

**Propriété.** ( $\mathcal{P}$ ) *Un triangle de côtés  $x, y, z$  (avec  $0 < x \leq y \leq z$ ) est obtus si, et seulement si,  $z^2 > x^2 + y^2$ .*

Ce résultat est assez intuitif, il découle par exemple du produit scalaire ou de la formule dite d'Al-Kashi dans un triangle  $ABC$  :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Notons les longueurs  $a, b, c, d, e$  des cinq segments par ordre croissant.

$$0 < a \leq b \leq c \leq d \leq e$$

Je note par un triplet comme  $(c; d; e)$  le triangle de côtés  $c, d$  et  $e$ . Je vais faire un raisonnement par l'absurde. Supposons que les trois triangles  $(c; d; e)$ ,  $(b; c; d)$  et  $(a; b; c)$  soient obtus. Alors par la propriété ( $\mathcal{P}$ ) on a :

$$e^2 > d^2 + c^2 \quad (1)$$

$$d^2 > c^2 + b^2 \quad (2)$$

$$c^2 > b^2 + a^2 \quad (3)$$

Par (1) et (2) on a :  $e^2 > (c^2 + b^2) + c^2$  donc  $e^2 > 2c^2 + b^2$ . Et en utilisant (3) on a  $e^2 > 2(b^2 + a^2) + b^2$  et donc :

$$\boxed{e^2 > 3b^2 + 2a^2} \quad (4)$$

Or on sait par hypothèse de l'énoncé que  $e \leq b + a$  et donc :

$$\boxed{e^2 \leq (b + a)^2} \quad (5)$$

Cela va nous donner une contradiction avec (4) car je dis qu'on a toujours l'inégalité :  $3b^2 + 2a^2 > (a + b)^2$ . En effet :

$$\begin{aligned} 3b^2 + 2a^2 - (b + a)^2 &= 3b^2 + 2a^2 - (b^2 + 2ab + a^2) \\ &= b^2 + (b^2 - 2ab + a^2) \\ &= b^2 + (b - a)^2 \end{aligned}$$

On a une somme de deux carrés qui est donc positive, et même strictement puisque  $b > 0$ , ainsi on a bien  $3b^2 + 2a^2 > (a + b)^2$  et par (4) on en déduit que  $e^2 > (b + a)^2$  ce qui est contradictoire avec (5) et donc au moins un des trois triangles  $(c; d; e)$ ,  $(b; c; d)$  et  $(a; b; c)$  n'est pas obtus. Ainsi parmi tous les triangles qu'on peut construire il y en a au moins un qui a trois angles aigus.