Le jeu de Marienbad.
Théorie mathématique, stratégie gagnante.

Vincent PANTALONI

26 octobre 2009

```
| | | |
 | | |
  | |
   |
```

Le *jeu de Marienbad* tire son nom du film *L'Année dernière à Marienbad* d'Alain Resnais sorti en 1961, il est aussi appellé *jeu de Nim* ou *Fan-tan* en Chine, ou encore *Tiouk-tiouk* en Afrique. Ce jeu est probablement très ancien, il se joue entre deux joueurs avec des pions, graines ou allumettes. Nous étudierons la version suivante du jeu :

Règles du jeu : On dispose des allumettes en n lignes contenant chacune un nombre quelconque d'allumettes, disons respectivement a_1, a_2,..., a_n allumettes (les a_i sont dans $\mathbb{N}^*$). Chacun des deux joueurs doit à son tour oter un nombre quelconque (non nul) d'allumettes de la ligne de son choix (on dira qu'il *joue un coup*). Le perdant est celui qui prend la dernière allumette.

Exemple de partie. Souvent on joue avec la configuration de départ ci–contre. Montrons que dans ce cas, celui qui commence (disons le joueur 1) gagne à coup sûr si il joue bien. Pour cela on va étudier toutes les ripostes possibles de son adversaire, le joueur 2. Le joueur 1 commence par oter les quatre allumettes, après quoi le joueur 2 peut laisser l'une des six configurations :

```
   |
  | |
 | | |
| | | |
```

```
 |            |       |       |       |
| |    | |    |      | |              | |
| |   | | |  | | |    |     | | |
```

Ensuite le joueur 1 laisse les configurations suivantes. J'ai groupé les cas deux par deux :

```
            |       |       |        |
   | |      |       |       |
   | |      |       |       |
```

Pour le dernier cas, c'est fini, pour le deuxième les coups sont forcés et le joueur 2 perd encore, il reste le premier cas à détailler. Le joueur 2 otera une ou deux allumettes, et il restera l'une des deux configurations :

```
 |      | |
| |
```

Il est facile dans chaque cas au joueur 1 de laisser la dernière allumette à son adversaire. On va montrer dans le cas général qu'il existe une stratégie gagnante (*i.e.* une méthode de jeu qui permet à coup sûr de gagner) pour l'un des deux joueurs. Dans notre exemple c'était pour le joueur qui commençait.

Décomposition en base 2. On décompose chaque a_i (pour i variant de 1 à n) en base 2 :

$$a_i = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_i(k)2^k \quad \text{où} \quad \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}, \varepsilon_i(k) \in \{0,1\}$$

Cette écriture est unique, et à partit d'une certaine valeur k_i, tous les $\varepsilon_i(k)$ sont nuls pour k strictement supérieur à k_i. Le nombre a_i peut être alors noté :

$$a_i = \overline{\varepsilon_i(k_i)\varepsilon_i(k_i-1)\cdots\varepsilon_i(2)\varepsilon_i(1)\varepsilon_i(0)}$$

La barre signifiant « en base 2. »

Exemple : $13 = 8+4+1 = 2^3+2^2+0\times 2^1+2^0 = \overline{1101}$. On a $\varepsilon(3) = \varepsilon(2) = \varepsilon(0 = 1$ et $\varepsilon(1) = 0$
2^{k_i} est laplus grande puissance de 2 inférieure à a_i. On continue ensuite avec $a_i - 2^{k_i}$.

Chaque ligne est ainsi décomposée en « paquets » d'effectif une puissance de deux. On appelera k-paquet un tel paquet d'effectif 2^k

Remarque. Comme les $\varepsilon(k)$ valent 0 ou 1, chaque ligne comporte au plus un k-paquet pour tout k dans $\mathbb{N}$.

On compte ensuite le nombre total (dans toutes les lignes) de k-paquets pour chaque k dans $\mathbb{N}$. *i.e.* pour tout k dans $\mathbb{N}$ on calcule :

$$N(k) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(k)$$

Définition 1. On dira qu'on a une *configuration paire*, noté $(\mathcal{CP})$ si l'un ou l'autre des points suivants est vérifié :
$(\mathcal{CP}_1)$: $\forall k \in \mathbb{N}; N(k) \equiv 0$ [2].
$(\mathcal{CP}_2)$: $\forall k \in \mathbb{N}^*; N(k) = 0$ et $N(0) \equiv 1$ [2].
Toute autre configuration sera dite impaire, qu'on notera $(\mathcal{CI})$.

$(\mathcal{CP}_1)$ signifie que tous les $N(k)$ sont pairs, et $(\mathcal{CP}_2)$ qu'il n'y a que des lignes d'une allumette, et ces lignes sont en nombre impair. Si on reprend notre partie exemple du début, on remarque que le joueur 1 a toujours laissé une $(\mathcal{CP})$ à son adversaire qui lui n'a pu que laisser une $(\mathcal{CI})$ au joueur 1.

Exemple : La configuration $(|;||;|||) = (1;2;3)$ est paire car on décompose 3 en $3 = 2+1 = \overline{11}$ et on a donc au total deux paquets de 1 et deux paquets de 2, *i.e.* $N(0) = N(1) = 2$. Par contre vérifiez que les six configurations possibles qui ont suivi sont des $(\mathcal{CI})$.

On peut maintenant énoncer les deux propriétes qui font qu'il existe une stratégie gagnante pour celui qui peut à un moment laisser une situation paire à son adversaire :

Propriété 1. *Toute $(\mathcal{CP})$ devient nécessairement une $(\mathcal{CI})$ après un coup.*

Propriété 2. *De toute $(\mathcal{CI})$ on peut obtenir une $(\mathcal{CP})$ en un coup.*

Ces deux propriétés asurent conjointement qu'un des joueurs pourra toujours laisser une $(\mathcal{CP})$ à son adversaire. Le nombre d'allumettes se réduisant à chaque coup, il finira par laisser la dernière allumette (c'est une $(\mathcal{CP})$!) à son adversaire, ainsi il gagnera.

Démonstration. **(Propriété 1.)** On suppose qu'on a une $(\mathcal{CP})$.

- Si on a une $(\mathcal{CP}_2)$, c'est trivial : On n'a que des lignes de 1 en nombre impair, après quoi on laisse nécessairement que des lignes de 1 en nombre pair, ce qui est une $(\mathcal{CI})$. (Éventuellement on prend la dernière allumette et on a perdu)
- On suppose qu'on a une $(\mathcal{CP}_1)$. L'idée est la suivante : lorsqu'on enlève un nombre quelconque d'allumettes, il existe k tel qu'on suprime exactement un k-paquet dont la parité change et devient donc impair, ainsi on a une $(\mathcal{CI})$. Formalisons celà.
  On choisit un tas quelconque avec a allumettes ($a \in \mathbb{N}^*$). On note en base 2 :

  $$a = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon(k)2^k$$

  En otant des allumettes, on en laisse $a' = \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon'(k)2^k$. avec a' strictement inférieur à a. Donc il existe un certain k_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $\varepsilon(k_0) = 1$ et $\varepsilon'(k_0) = 0$. En effet, comme $a \neq a'$

il existe un k dans $\mathbb{N}$ tel que $\varepsilon(k) \neq \varepsilon'(k)$, et si pour tout k dans $\mathbb{N}$: $\varepsilon(k) = 1 \implies \varepsilon'(k) = 1$ alors on aurait $a' \geqslant a$, ce qui n'est pas. On peut donc considérer un entier naturel k_0 tel que :

$$\varepsilon(k_0) = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon'(k_0) = 0.$$

On a une $(\mathcal{CP}_1)$, donc $N(k_0)$ est pair, ainsi après un coup on a $N'(k_0) = N(k_0) - 1$ qui est impair et on laisse donc une $(\mathcal{CI})$.

□

Démonstration. **(Propriété 2.)** On suppose qu'on a une $(\mathcal{CI})$. On distingue encore plusieurs cas :

– Si il n'y a que des lignes de 1 (en nombre pair), on n'a pas le choix : on en prend une et on a une $(\mathcal{CP}_2)$.
– Si il n'y a que des lignes de 1, sauf une, disons la ligne ℓ c'est aussi facile de laisser une $(\mathcal{CP}_2)$: on retire toutes les allumettes ou on en laisse une sur cette ligne ℓ.
– Il nous reste le cas où il existe au moins deux lignes comportant plus d'une allumette. On va exposer une méthode pour laisser une $(\mathcal{CP}_1)$ dans ce cas. C'est à dire ne laisser que des $N'(k)$ pairs.

  Soit k^* le plus grand entier k tel que $N(k)$ est impair. On choisit une ligne ℓ comportant un paquet de 2^{k^*} allumettes *i.e.* une ligne d'effectif a tel que $\varepsilon(k^*) = 1$. L'objectif est de soustraire à a un nombre d'allumettes tel que tous les $N(k)$ pairs le restent et que que tous les $N(k)$ impairs deviennent pairs. On distingue trois ensembles :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P} &= \{k \in \mathbb{N}\,; N(k) \equiv 0 \ [2]\} \\
\mathscr{I}^+ &= \{k \in \mathbb{N}\,; N(k) \equiv 1 \ [2] \ \text{ et } \varepsilon(k) = 1\} \\
\mathscr{I}_- &= \{k \in \mathbb{N}\,; N(k) \equiv 1 \ [2] \ \text{ et } \varepsilon(k) = 0\}
\end{aligned}$$

  On veut changer la parité des $N(k)$ lorsque k appartient à $\mathscr{I}_-$ ou $\mathscr{I}^+$ et ne pas la changer pour les k dans $\mathscr{P}$. Lorsque $k \in \mathscr{I}^+$ cela signifie que la ligne ℓ contient un k-paquet et on veut donc le supprimer ; lorsque $k \in \mathscr{I}_-$ cela signifie que la ligne ℓ ne contient pas de k-paquet et on veut le créer. C'est possible :

  Exemple : Supposons que $a = 90$ qui s'écrit en base 2 : $a = \overline{1011010}$. Supposons que :

$$\mathscr{P} = \{0; 3; 5; 6\}\,; \ \mathscr{I}^+ = \{1; 4\}\,; \ \mathscr{I}_- = \{2\}$$

  Ainsi $k^* = 4$. Pour plus de lisibilité, je note un $+$ ou un $-$ au dessus du chiffre correspondant dans l'écriture de a selon si il correspond à un k de $\mathscr{I}^+$ ou de $\mathscr{I}_-$:

$$a = \overline{10\overset{+}{1}1\overset{-}{0}\overset{+}{1}0}$$

  Il suffit alors d'échanger les 0 et 1 si ils comportent un signe. On pose :

$$a' = \overline{10\mathbf{0}1\mathbf{10}0}$$

  Ce nombre a' est bien inférieur à a, on a donc retiré des allumettes, et on a changé la parité de tous les k-paquets pour lesquels $N(k)$ était impair. Formalisons celà dans le cas général.

  On a :

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{k \in \mathscr{P}} \varepsilon(k) 2^k + \sum_{k \in \mathscr{I}^+} \varepsilon(k) 2^k + \sum_{k \in \mathscr{I}_-} \varepsilon(k) 2^k \\
&= \sum_{k \in \mathscr{P}} \varepsilon(k) 2^k + \sum_{k \in \mathscr{I}^+} 2^k
\end{aligned}$$

  On pose alors :

$$a' = \sum_{k \in \mathscr{P}} \varepsilon(k) 2^k + \sum_{k \in \mathscr{I}_-} 2^k$$

C'est à dire qu'on retire $a - a'$ allumettes, vérifions que $a - a'$ est supérieur à 1 :

$$\begin{aligned} a - a' &= \sum_{k \in \mathscr{I}+} 2^k - \sum_{k \in \mathscr{I}_-} 2^k \\ &= 2^{k^*} + \sum_{k \in \mathscr{I}^+ \setminus \{k^*\}} 2^k - \sum_{k \in \mathscr{I}_-} 2^k \\ &\geqslant 2^{k^*} - \sum_{k \in \mathscr{I}_-} 2^k \end{aligned}$$

Or par définition de k^*, et par le choix d'une ligne qui contient un k^*–paquet, on a k^* qui appartient à $\mathscr{I}^+$éet :

$$\forall k \in \mathscr{I}_- \,;\; k \leqslant (k^* - 1)$$

ainsi :

$$a - a' \geqslant 2^{k^*} - \sum_{k=0}^{k^*-1} 2^k = 1$$

On a donc bien enlevé au moins une allumette. Par construction de a' on a :

- $k \in \mathscr{P} \implies N'(k) = N(k)$
- $k \in \mathscr{I}^+ \implies N'(k) = N(k) - 1$
- $k \in \mathscr{I}_- \implies N'(k) = N(k) + 1$

Ainsi pour tout k dans $\mathbb{N}$, $N'(k)$ est pair et on a bien une $(\mathcal{CP}_1)$.

$\square$