

Triangulation

I Méthode mathématique

Dans la suite ABC désigne un triangle et on note :

$$a = BC, \quad b = AC \quad \text{et} \quad c = AB.$$

On peut, connaissant un côté et deux angles (et donc le troisième angle par différence avec 180°) déterminer les autres côtés et angles grâce à la formule dite des *formule des sinus* :

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Application : On veut calculer la distance AK pour connaître la longueur d'une partie du méridien. On a mesuré la longueur $BC = 100$ et les angles marqués sur la figure.

1. Calculer AB .
2. En déduire AH .
3. De même calculer BD puis HK .
4. Enfin déterminer AK .

En pratique Sur la figure 1, A, B, C, D représentent des lieux remarquables visibles de loin tels que sommet de clocher, tour, ... etc. On calcule la distance BC et grâce à des appareils de visée on détermine les différents angles nécessaires. Gemma FRISIUS (1508-1555) énonce, semble-t-il le premier, en 1533 la méthode de triangulation.

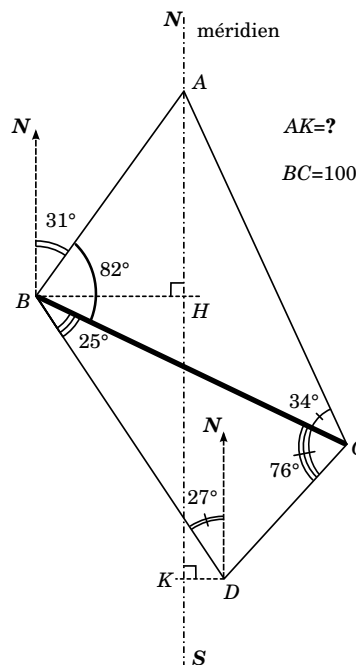


FIGURE 1 – Triangulation

II Mesure de la Terre par PICARD

En 1669-1670 l'Abbé PICARD effectua de nombreuses mesures par triangulation puis publia un ouvrage intitulé « Mesure de la Terre » dont voici des extraits :

- 1 La Mesure de la Terre, est une connaissance si utile pour l'Astronomie & pour la Géographie ; que
- 2 la plupart des Mathématiciens, tant anciens que modernes, ont apporté tous leurs soins, suivant la com-
- 3 modité des lieux où ils ont été, & des instruments, qui étaient alors en usage, pour la connaître avec le
- 4 plus de justesse qu'il leur a été possible. Et comme on a toujours été dans la persuasion que la Terre est
- 5 d'une figure sphérique, on a commencé par la mesure de l'un de ses grands Cercles, dont on s'est contenté
- 6 jusqu'à présent de mesurer un ou deux degrés, pour en conclure la mesure de toute la circonférence ;
- 7 ensuite celle de toute sa superficie. Mais entre les grands Cercles, que l'on aurait pu tracer sur la Terre,
- 8 on s'est arrêté de préférence à mesurer le Méridien, à cause qu'il n'y en a point dont la position soit plus
- 9 aisée à bien déterminer, & sur lequel on puisse plus exactement marquer les termes précis d'un degré.
- 10 Les Mesures que les Anciens nous ont laissées, de la grandeur du degré d'un Méridien, ne nous étant pas
- 11 assez connues, par la raison que nous n'avons pas celles dont ils se sont servis, & auxquelles ils les ont
- 12 comparées ; & d'ailleurs les mesures que les Modernes en ont données, ne s'accordant pas entre elles, il
- 13 semblait que ce grand Ouvrage regardait principalement l'Académie Royale des Sciences, & que c'était
- 14 une des plus belles entreprises qu'elle pouvait faire. [...] Après avoir examiné le Pays qui est depuis les
- 15 environs de Paris jusqu'à l'entrée de la Picardie ; on trouva qu'il était assez commode pour ce dessin, à
- 16 cause qu'il n'est pas rempli de bois, & qu'il n'y a aucunes montagnes qui soient considérables ; & que
- 17 l'espace contenu entre Sourdon proche de Mareil, & Malvoisine sur les confins du Gatinois & du Hurepoix,
- 18 serait fort propre pour l'exécution de cette entreprise, d'autant mieux que ces deux termes sont à peu
- 19 près dans le même Méridien, & qu'ils sont éloignés l'un de l'autre d'environ trente lieux communes de
- 20 France ; & de plus, que ces deux Points pouvaient être liés ensemble par de grands triangles, & par une
- 21 mesure très exacte de trois lignes¹ seulement comme on le verra dans la suite.

1. Il y a 12 lignes dans un pouce

II.1 Les différentes étapes

Les treize triangles On choisit treize Stations, ou treize points principaux, pour faire treize grands triangles, d'où devait résulter cette mesure. (cf extrait ci-dessous. Fig.2).

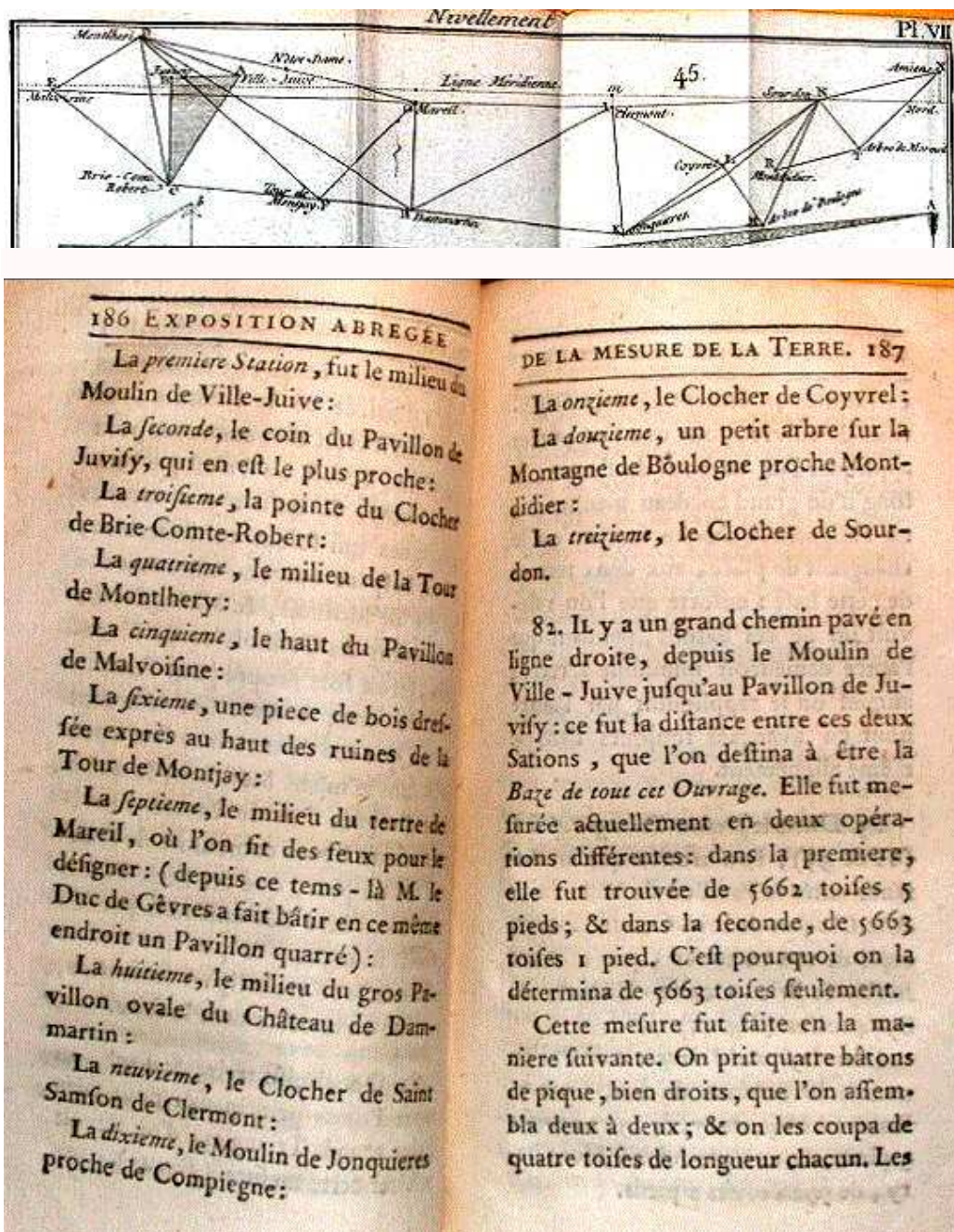


FIGURE 2 – Les treize stations

Mesure de la base Il y a un grand chemin pavé en ligne droite... cf Fig.2.

- ① Repérez et numérotez les sept premières stations sur le croquis (Fig. II.1)
- ② Expliquer pourquoi PICARD a retenu la mesure de 5563 toises pour la distance qui servit de « Baze de tout cet ouvrage »
- ③ En déduire le nombre de pieds dans une toise d'après le texte.

Calcul des distances. Dans le premier Triangle ABC, l'on trouva que la distance entre le Pavillon de Ville-juive & le Clocher de Brie Comte-Robert, était de 11012 toises 5 pieds; entre Juvisy & brie Comte-Robert, de 8954 toises; Dans le second triangle ADC, l'on trouva la distance de Brie-Comte-Robert à Montlhery, de 13121 toises 3 pieds; & de Ville-Juive à Montlhery, de 9922 toises 2 pieds. [...] Dans le treizième Triangle ILN, l'on trouva la distance entre les Clochers de Saint Samson de Clermont & de Sourdon, de 18905 toises. Les trois Lignes principales, déduites de toutes ces opérations, sont la ligne EG, de Malvoisine au tertre de Mareil, de 31897 toises; la ligne GI, du tertre de Mareil à Saint Simon de Clermont, de 17557 toises; la ligne IN, de Saint Samson de Clermont à Sourdon, de 18905 toises.

- ① Qui sont les points A, B, C notés sur la fig. 4
- ② Refaire le calcul donnant la distance entre le Pavillon de Ville-juive et le Clocher de Brie Comte-Robert.

Orientation par rapport à la méridienne Au mois de septembre de l'année 1669, on alla sur le tertre de Mareil, à l'endroit où l'on avait fait des feux pour désigner le point de cette station, d'où l'on voyait Malvoisine d'un côté & Clermont de l'autre. On y posa le Quart de cercle, garni de ses deux Lunettes, à plomb sur son pied; [...] le Vertical de l'Etoile Polaire, dans sa plus grande digression faisait avec le Méridien, un angle de 3 degrés 46 minutes. [...] calculs d'angles [...] Par conséquent, Malvoisine reste du Midi au Couchant, de 26 minutes, à l'égard du tertre de Mareil.

Projection sur la méridienne Après avoir déterminé la position d'une Ligne méridienne, qui passait par Sourdon, & mesuré sa grandeur comprise entre ce même lieu & le parallèle de Malvoisine; il ne s'agissait plus que de savoir la différence des hauteurs du Pôle de ces deux lieux, pour pouvoir être assuré des Termes d'un degré, dans le Méridien terrestre.

Différence de latitude entre les extrémités [...] on trouva en Septembre 1670 à Malvoisine, dans un lieu plus méridional de 18 toises que le Pavillon, que la distance sur le Méridien, entre le Zénith & cette Etoile², était vers le Septentrion, de 9 degrés 59 minutes 5 secondes. En Septembre & en Octobre, à Sourdon, dans la Maison Presbytérale, qui est plus Septentrionale que l'Eglise de 65 toises; on trouva que la distance sur le Méridien, entre le Zénith & cette même Etoile, était vers le Septentrion, de 8 degrés 47 minutes 8 secondes. De ces deux observations, il résulte que la différence de latitude, entre Malvoisine & Sourdon, est de 1 degré 11 minutes 57 secondes. [...] De là l'on conclut que le Degré du Méridien terrestre, contiendra 57064 toises 3 pieds.

Précision des mesures Mais quoique les instruments dont on s'est servi pour prendre les hauteurs des Etoiles fixes, soient très grands & très bien divisés, on ne peut point pourtant être complètement assuré qu'il n'y ait pas une erreur de 4 secondes de degré au plus, dans les hauteurs que l'on assigne aux Etoiles [...] C'est une Erreur peu considérable, pour un Degré; mais elle le devient dans la mesure du Cercle entier, étant multipliée 360 fois. [...] Sa Majesté voulant que l'on perfectionnât cet ouvrage de la Mesure de la Terre, autant qu'il serait possible, ordonna l'année dernière 1683, aux Mathématiciens de l'Académie des Sciences, de continuer la même entreprise; & en se servant de ce qui était déjà fait, de prolonger vers le Midi, jusqu'aux confins du Royaume, une Ligne méridienne, qui passât par le milieu de l'observatoire de Paris.

2. « Cette étoile » réfère à Cassiopeée.

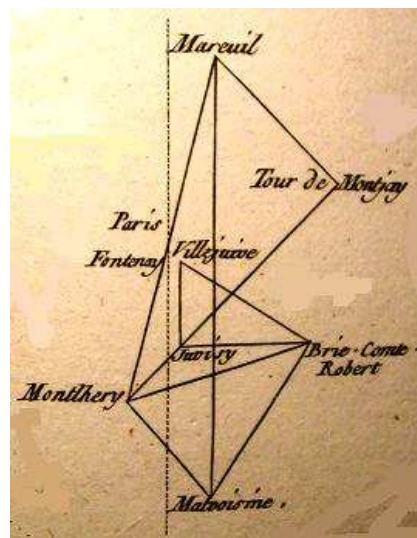


FIGURE 3 – Stations 1 à 7.

<i>Premier Triangle ABC, pour connaître le côté AC.</i>	
CAB =	54°. 4'. 35".
ABC =	95. 6. 55.
ACB =	30. 48. 30.
<i>Second Triangle ADC, pour DC & AD.</i>	
DAC =	77°. 25'. 50".
ADC =	55. 0. 10.
ACD =	47. 34. 0.
<i>Troisième Triangle DEC, pour DE & CE.</i>	
DEC =	74°. 9'. 30".
DCE =	40. 34. 0.
CDE =	65. 16. 30.
<i>Quatrième Triangle DCF, pour le côté DF.</i>	
DCF =	113°. 47'. 40".
DFC =	33. 40. 0.
FDC =	32. 32. 20.

FIGURE 4 – Angles relevés