I159. Réseau interstellaire.

Problème proposé par Michel Lafond

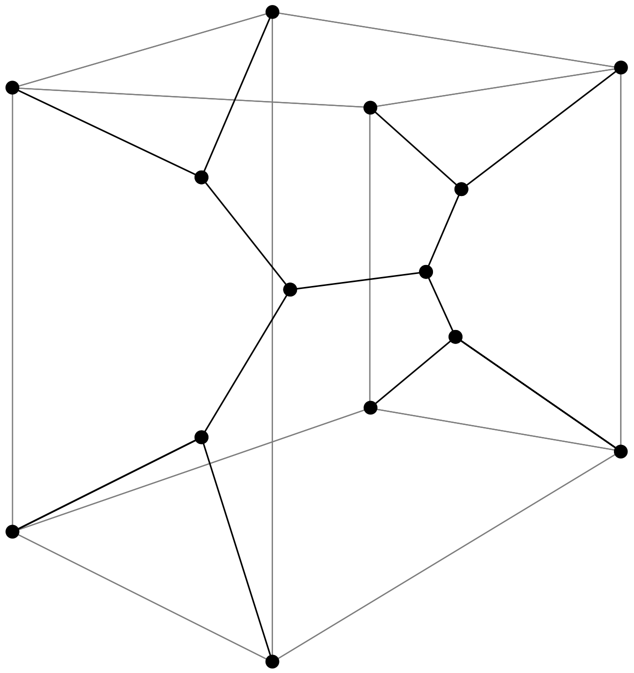
Vincent PANTALONI

16 janvier 2011

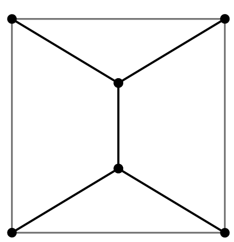
Enoncé : Raccorder les 8 étoiles situées aux sommets d'un cube d'un parsec de côté par un réseau de segments de longueur totale minimale sachant que des nœuds en dehors des sommets sont autorisés.

Solution : ....

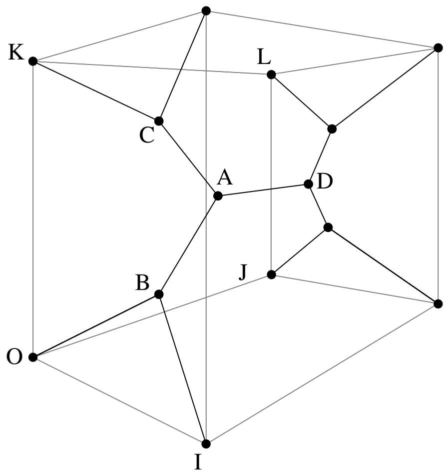
Je pense que le réseau le plus court est celui dessiné ci-dessous et qui est caractérisé par des angles de 120 degrés à chacun des six nœud entre chaque paire de segment incidents à ce nœud. Je vais montrer que la longueur de ce réseau est $1 + 3\sqrt{3} \approx 6,196$

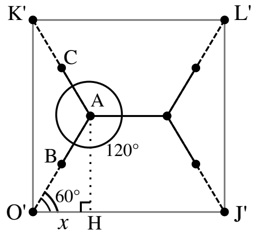


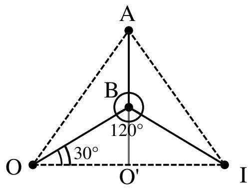
Il s'agit d'un problème en trois dimensions s'aparentant aux problèmes dans le plan I147 et D447 qui utilisaient les notions de point de Fermat-Toricelli et d'arbre de Steiner. Je sais depuis que pour un carré le réseau le plus court connectant les quatre sommets est celui ci-contre, avec des angles de 120 degrés autour des deux nœuds. J'ai alors imaginé connecter les sommets de deux faces opposées du cube par ce réseau et ensuite de relier les deux par un élastique attaché au milieu de chaque segment joignant les deux nœuds, ce qui donne la figure ci-dessus.



Pour calculer la longueur totale de ce réseau j'ai besoin de la contrainte des angles de 120 degrés et de remarquer la coplanarité des six nœuds. Pour être plus clair voici une figure légendée :







L'essentiel est de connaitre la position du point A. Je me place dans le repère orthonormé (O, I, J, K) où le point A a des coordonnées de la forme $(\frac{1}{2}; x; \frac{1}{2})$. Le carré montre une vue de droite du cube qui permet de calculer x. O', J', K', L' sont les projections de O, J, K et L dans le plan ABC. $O'AK$ est isocèle avec un angle de 120, il reste donc 30 pour l'angle en O' dans ce triangle. Ainsi dans le triangle rectangle $O'AH$ l'angle en O' vaut 60 degrés, donc $O'A = 2x$. Sachant que $AH = \frac{1}{2}$, on trouve grace à Pythagore que $(2x)^2 = x^2 + 1/4$ et donc $x^2 = 1/12$ soit

$$x = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Le point B est dans le plan (OIA). Dans le triangle OIB, comme l'angle O mesure 30 degrés et que $OI = 1$ on a donc $OB = \frac{1}{2\cos 30} = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$

$$OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$O'B$, la hauteur issue de B dans OBI mesure donc la moitié, soit $\sqrt{3}/6$, ce qui est égal à x. Or $O'A = 2x$ donc B se trouve au milieu de $[O'A]$ et donc $AB = x$.
La longueur totale du réseau mesure : $8 \times OB + 4 \times AB + AD$ soit :

$$8 \times \sqrt{3}/3 + 4 \times x + (1 - 2x) = \frac{8\sqrt{3}}{3} + 2x + 1 = \frac{8\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \boxed{1 + 3\sqrt{3}}$$

On peut comparer cette longueur $1 + 3\sqrt{3}$ au réseau simple qu'on obtient en suivant sept arêtes du cube. $1 + 3\sqrt{3} \approx 6,196$ soit environ $88,5\%$ de 7.