Dimensions
et
Dimensions fractales

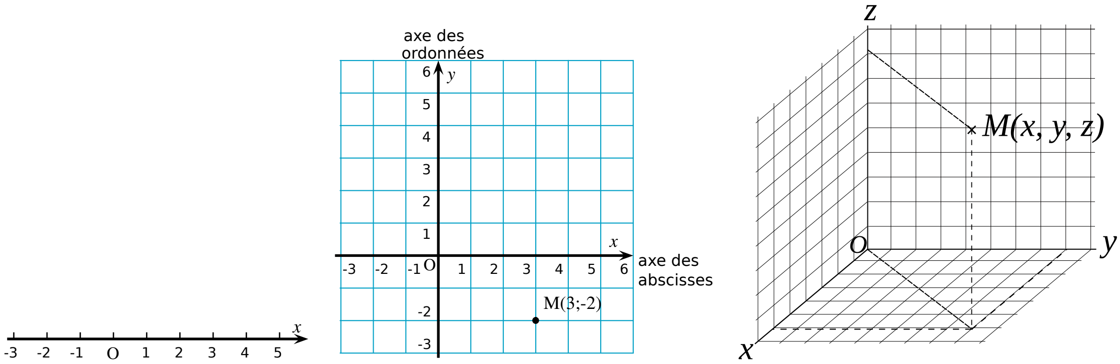
Vincent PANTALONI

15 avril 2011

J'ai écrit cet article pour répondre à un collègue professeur de philosophie sur ce qu'est la dimension de Bouligand. Ce collègue – Marc Patard – est le petit fils du mathématicien George Bouligand et était bien sûr curieux de comprendre cette notion de dimension fractale très couramment utilisée aujourd'hui à laquelle son grand-père a laissé son nom. Cette présentation s'adresse donc à un lecteur qui n'est pas nécessairement très familier avec les mathématiques. C'est pourquoi j'ai rappelé les propriétés utiles des logarithmes qui sont nécessaires pour comprendre la notion de dimension fractale.

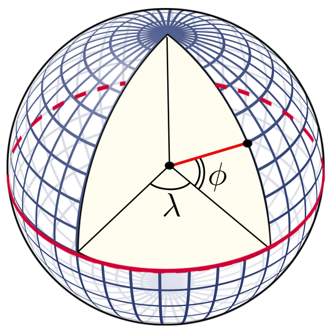
1 Dimensions entières.

Notre espace est à trois dimensions. On dit qu'on vit dans un espace à trois dimensions, qu'est-ce que cela signifie ? En première approche on peut dire qu'une boîte à chaussure est un objet qui a trois dimensions : longueur, largeur et hauteur. Plus généralement, pour nous repérer dans l'espace il nous faut trois coordonnées $(x; y; z)$ une fois qu'on s'est donné une origine et des axes. Alors que dans le plan, deux coordonnées $(x; y)$ suffisent ; on dit donc que le plan est un espace à deux dimensions. De même pour repérer un point sur une droite, un seul nombre x suffit, la droite est un espace à une dimension.



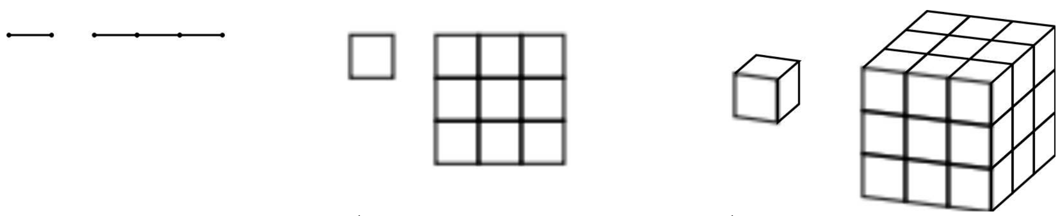
La dimension d'un espace est le nombre de coordonnées nécessaires pour repérer un point.

Un premier piège. Une sphère nous apparait comme un objet « en trois dimensions » mais c'est en fait un objet de dimension 2. En effet, on sait bien que pour repérer sa position à la surface de la Terre il suffit de deux nombres, typiquement la longitude et la latitude. Cependant une boule (une sphère et son intérieur) est bien de dimension 3, il nous faut un troisième nombre en plus de la latitude et longitude, pour indiquer la distance au centre de cette boule par exemple.



La longitude λ et la latitude ϕ d'un point sur la sphère.

Effet des agrandissements. Une autre propriété de ces dimensions est leur effet sur les changement d'échelle (agrandissement ou réduction) appelés *homothéties* en mathématiques. Sur la figure ci-dessous on a dessiné un segment, un carré, un cube et leur image après un agrandissement d'un facteur 3 (ou homothétie de coefficient $k = 3$). Chacune de ces figure est de dimension respective 1, 2, 3 et après agrandissement on observe que la longueur de la ligne est multipliée par $3 = 3^1$ (pas étonnant...), mais la surface du carré est multipliée par $9 = 3^2$, et le volume du cube est multiplié par $27 = 3^3$. Ainsi la grandeur a été multipliée par 3^d où d est la dimension de l'objet.



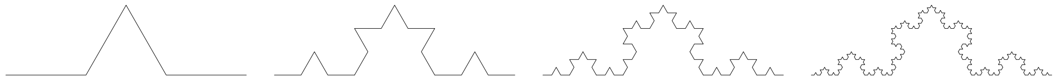
Dimension $d = 1$ Longueur multipliée par $3^1 = 3$	Dimension $d = 2$ Surface multipliée par $3^2 = 9$	Dimension $d = 3$ Volume multiplié par $3^3 = 27$

C'est cette propriété qui va nous permettre de faire le lien avec ce qu'on appelle la dimension fractale d'un objet. Mais d'abord qu'est-ce qu'une fractale ?

2 Quelques fractales

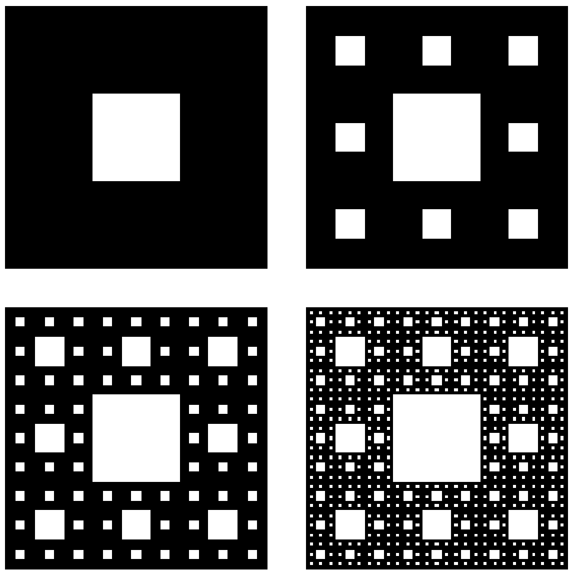
Une fractale est un objet mathématique qui se caractérise par son *autosimilarité* c'est à dire (pour des fractales simples, dites à similitude interne) qu'un changement d'échelle ne change pas l'aspect de l'objet. Autrement dit, même en zoomant indéfiniment, on retrouve l'objet entier, une partie est semblable au tout. Voici quelques exemples classiques de fractales ayant cette propriété.

La courbe de Von Koch**.** On la construit récursivement : on part d'un segment initial. On remplace le tiers central par deux segments de même longueur. On répète ce procédé indéfiniment sur chaque segment, à la limite on obtient la courbe de Von Koch.



Les quatre premières étapes de la construction de la courbe de Von Koch

Le tapis de Sierpinski**.** On suit un procédé itératif similaire : on part d'un carré noir, on le quadrille en 9 carrés identiques et on colorie le carré central en blanc. On recommence sur les huit autres petits carrés, et ainsi de suite. Le tapis de Sierpinski est la figure blanche obtenue après une infinité d'itération.



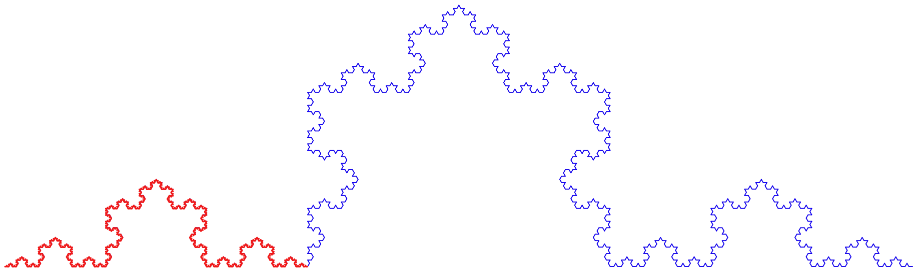
Les quatre premières étapes de la construction du tapis de Sierpinski.

Ces deux objets fractals sont respectivement de dimension 1 et 2 mais cela ne rend pas compte de leur complexité. Par exemple la courbe de Von Koch qui est très repliée sur ellle même a une longueur infinie. En effet, à chaque étape, tout segment est remplacé par 4 segments 3 fois plus petits, et donc la longueur totale est multipliée par 4/3 c'est à dire augmentée d'environ 33%. Ainsi, par exemple sur la figure ci-dessus on est parti d'un segment initial de 3 cm et on obtient successivement une longueur de : 4, $16/3 \approx 5,3$, $64/9 \approx 7,1$, puis environs 9,5 cm pour la dernière dessinée… et au bout de 50 itérations on obtient une longueur de $3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{50}$ cm soit environ 53 kilomètres !
Mandelbrot a expliqué que des côtes découpées, comme celle de l'Angleterre ou de la Bretagne avaient une structure similaire et que calculer leur longueur n'avait aucun sens, car selon l'échelle de carte choisie, cette mesure donnait des résultats très différents qui ne s'approchaient pas d'une « vraie valeur » mais qui au fur et à mesure que l'échelle devenait plus fine donnait des mesures qui tendent vers plus l'infini. Alors quelle autre notion de mesure ou de dimension serait adaptée pour quantifier la densité de repliement de tels objets ?

3 Dimension fractale

3.1 Pour une fractale à similitude interne.

On a vu que si un objet de dimension d est agrandi trois fois par exemple alors sa mesure (longueur, surface, volume...) est multipliée par 3^d. Observez que la figure ci-dessous de la courbe de Von Koch. Par construction la partie rouge est une réplique miniature de l'ensemble de la courbe. Si on agrandit d'un facteur 3 la partie rouge, on peut la superposer sur la totalité en bleu de la courbe. Cependant la courbe de Von Koch est constituée d'exactement 4 parties identiques à la partie rouge. Donc si on agrandit trois fois la courbe de Von Koch, on obtient quatre fois le motif initial, donc en un certain sens, sa longueur est multipliée par 4. On est donc tenté par analogie à dire que sa dimension d vérifie $3^d = 4$.



Un agrandissement d'un facteur 3 de la courbe de Von Koch multiplie sa longueur par 4.

En ce sens cette courbe n'est ni de dimension 1 ni de dimension 2 car $3^1 < 4 < 3^2$. Sa *dimension fractale* n'est donc pas un entier mais un nombre compris entre 1 et 2. Si on cherche le nombre d tel que $3^d = 4$, les logarithmes sont nécessaires. Le logarithme népérien d'un nombre x strictement positif vérifie la propriété :

$$\ln(x^n) = n\ln(x)$$

Donc en particulier $\ln(3^d) = d\ln(3)$ et donc puisque $3^d = 4$ on a $d\ln(3) = \ln(4)$ et ainsi :

$$d = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1,262$$

Si vous n'êtes pas familier avec les logarithmes, vous pouvez vérifier avec une calculatrice que $3^{1,262} \approx 4$. Cette dimension non entière est caractéristique des objets fractals. De la même manière, lorqu'on agrandit le tapis de Sierpinski d'un facteur trois, on retrouve huit copies (les huit carrés autour du carré central) du tapis initial, ainsi sa surface est multipliée par 8. Sa dimension fractale d vérifie donc $3^d = 8$ et donc comme précédemment, $d = \dfrac{\ln(8)}{\ln(3)} \approx 1,893$. À cause des nombreux trous dans ce carrés, sa dimension se retrouve inférieure à 2.
Plus généralement, lorsqu'on objet fractal est dit « à similitude interne » comme les deux étudiées, c'est à dire qu'une partie de la fractale agrandie d'un facteur k donne la fractale entière constituée de N répliques de cette partie, sa dimension fractale est :

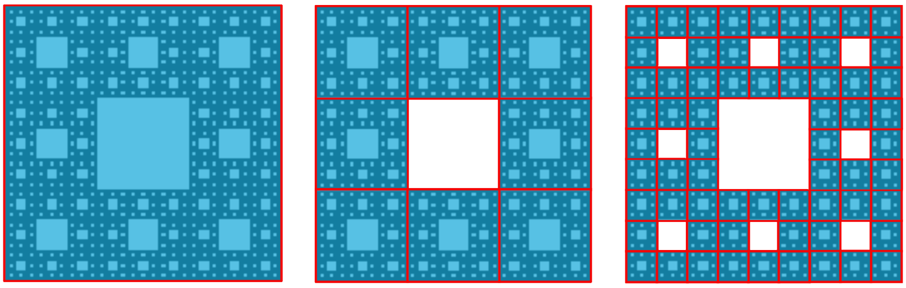
$$d = \frac{\ln(N)}{\ln(k)}$$

Cette dimension fractale correspond à la dimension de Hausdorff de la fractale qui a une définition dans un cadre plus général (d'un espace métrique quelconque) qui est trop compliquée pour être expliquée précisément ici et qui plus est, elle est inutilisable en pratique pour déterminer la dimension d'une fractale quelconque.

3.2 Dimension de Bouligand.

Imaginons que l'on veuille calculer la dimension d'un objet fractal qui n'a pas de similitude interne comme par exemple la côte de la Grande Bretagne. L'idée est de recouvrir cet objet par une maille carrée de plus en plus fine et de ne compter que les carrés qui recouvrent l'objet. Commençons à appliquer ce procédé au tapis de Sierpinski pour voir que l'on retrouve bien la

valeur précédemment calculée $d = \frac{\ln(8)}{\ln(3)}$.
On recouvre avec un carré initial, disons de côté 1, puis par 8 carrés de côté $1/3$, puis avec des côtés de $1/3^2$ il en faut $8 \times 8 = 8^2$, et ainsi de suite. Il faudra 8^n carrés de côtés $1/3^n$.



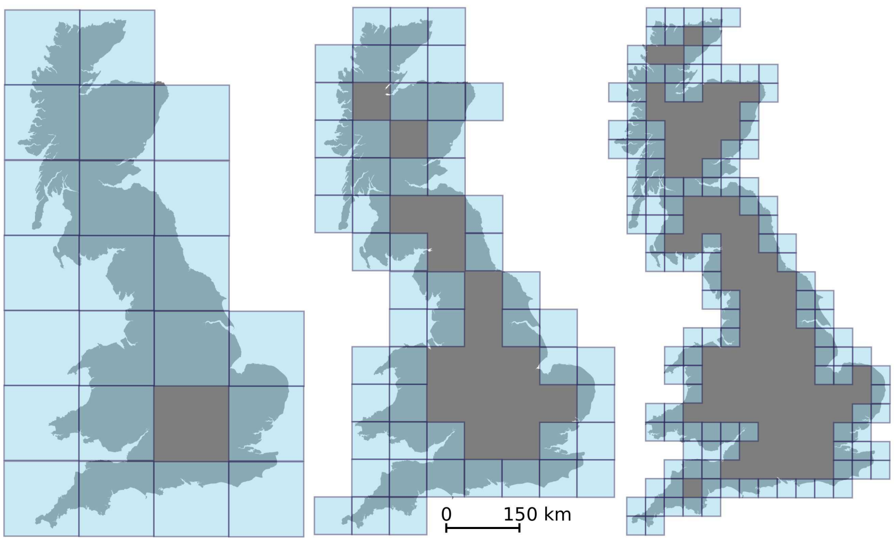
Tapis de Sierpinski recouvert par des carrés de côtés 1, puis $1/3$, puis $1/9$.

Pour passer d'un petit carré de côté $1/3^n$ au carré unitaire initial, il faut le multiplier par son inverse : 3^n. Lorsqu'on effectue cet agrandissement on obtient la figure initiale qui comporte donc 8^n copies de ce petit carré. D'après notre formeule précédente on obtient donc une dimension fractale pour le tapis de Sierpinski qui vaut :

$$\frac{\ln(8^n)}{\ln(3^n)} = \frac{n\ln(8)}{n\ln(3)} = \frac{\ln(8)}{\ln(3)}$$

Et on retrouve exactement la valeur précédemment calculée. Dans ce cas, cela ne dépend pas de la taille des côtés des carrés choisis, à cause de la propriété de similitude interne du tapis de Sierpinski. On généralise alors cette méthode pour calculer par exemple la dimension fractale de la côte de la Grande Bretagne : On recouvre l'île par une maille carrée dont les côtés sont de plus en plus petits. Alors par analogie avec le calcul précédent, on considère que l'objet est localement à similitude interne : si les carrés sont de côtés ε alors c'est en appliquant un agrandissement de $1/\varepsilon$ qu'on obtient le carré de longueur 1 et on peut estimer que chacun de ces petits carrés est une miniature d'un carré de côté 1. Si on note N_ε le nombre de carrés nécessaires au recouvrement de la côte, sa dimension fractale sera pour ε assez petit :

$$d \approx \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$



On compte le nombre N_ε de carrés de côtés ε pour recouvrir la côte de la Grande Bretagne.
Pour ε assez petit, la dimension fractale est environ $\frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$

Plus formellement on obtiendra la dimension fractale en faisant tendre ε vers zéro. On obtient ce qui s'appelle la dimension de BOULIGAND[1] (aussi de Minkowski-Bouligand, ou *box-counting* en anglais) d'un objet fractal $\mathscr{F}$. En notant $\dim(\mathscr{F})$ cette dimension on a donc :

$$\dim(\mathscr{F}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

Son avantage est de pouvoir se prêter à des calculs effectifs (par ordinateur) du comptage de carrés, donnant une valeur approchée de la dimension de n'importe quelle fractale dont on a une image.

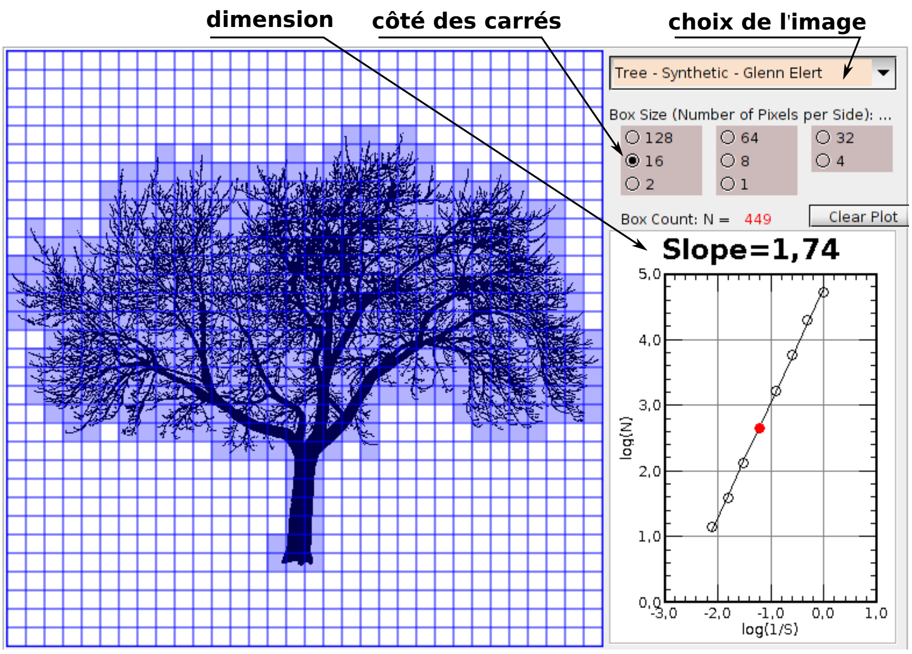
Approche graphique. Pour être plus précis, et ne pas retenir un seul comptage de carrés de côté donné mais plusieurs, on utilise un graphique. On supspecte que le nombre N_ε de carrés recouvrant la fractale suit une loi de puissance de la forme :

$$N_\varepsilon = C \times \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

Ainsi en prenant le logarithme (Rappels : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln(a^n) = n\ln(a)$) on a :

$$\ln(N_\varepsilon) = d \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \ln(C)$$

Autrement dit en posant $Y = \ln(N_\varepsilon)$ et $X = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ cette relation est de la forme $Y = dX + C$ c'est à dire que le graphique de $Y = \ln(N_\varepsilon)$ en fonction de $X = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ doit donner une droite dont la pente (*slope* in english) est la dimension cherchée : d. En pratique on utilise un logiciel qui trace un maillage carré sur la figure fractale, compte les carrés la recouvrant et place un point sur le graphique pour chaque taille de carrés choisie. On calcule alors la pente de la droite qui nous donne d. Vous pouvez voir en ligne (de préférence avec Firefox) cet Applet Java qui permet de faire automatiquement cette opération, il suffit de choisir l'image voulue parmi celles proposées (fractales ou arbres) et selectionner différentes tailles de carrés. cf capture d'écran ci-dessous.



1. BOULIGAND Georges Louis, mathématicien français, 1889-1979 Normalien (ancien élève de l'École normale supérieure), agrégé de mathématiques (1912), Bouligand enseigna tout d'abord au lycée de Rennes en classe de mathématiques spéciales. Il sera professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers (1928) avant d'être nommé à la Sorbonne (1938). La diversité des travaux de Bouligand tant en mathématiques qu'en physique est impressionnante : auteur de très nombreux articles et manuels portant sur l'analyse, la géométrie analytique et différentielle, la mécanique rationnelle, la théorie de la relativité, les objets fractals, la topologie, la physique mathématique : théorie du potentiel, mécanique des solides et des fluides, ...