Devoir de mathématiques
– Fibonacci et le Nombre d'Or –

Exercice n° 1 —— Golden sequence

On pourra reprendre le fichier `Suites-recurrentes-1.ggb` où on a représenté la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

1. Quelle est la formule de récurrence qui définit la suite (u_n) ?

2. Pour $u_0 = 1$, calculer u_1 et u_2 et u_3 sous forme de fraction. La suite (u_n) est-elle monotone ?

3. On appelle point fixe un réel x solution de $f(x) = x$. Prouver qu'ici les point fixes sont les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$ et les déterminer. On notera φ la solution positive et φ' la solution négative.

4. Avec Geogebra vous avez observé qu'un des points fixes était *attracteur*, et que l'autre était *répulsif*. Donner la nature des points fixes φ et φ' et expliquer un peu ce que calà signifie en terme de convergence pour la suite (u_n).

5. On part de $u_0 = 1$. En utilisant votre calculette et la touche `Ans` ou `Rép` et `Frac▶` sous TI, donner les valeurs de u_0 à u_6 sous forme de fraction.

6. Justifier que $u_6 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}}$.

7. Chercher sur internet l'écriture du nombre d'Or en *fraction continue* et l'expliquer.

Exercice n° 2 —— Lien avec Fibonacci

On note (F_n) la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur à 1 :

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1}$$

1. Calculer les premiers termes de F_1 à F_6.

2. Dans un tableur si en `A1` on entre la valeur 1 de F_1 et en `A2` la valeur 1 de F_2 ; quelle formule faut-il rentrer en `A3` pour que par recopie vers le bas on ait les termes de la suite (F_n) ?

3. Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle F_n dépasse un milliard ?

4. On pose pour tout n entier naturel non nul la suite (q_n) définie par : $q_n = \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$

  a. Calculer q_1. Donner pour n dans $\mathbb{N}$ l'expression de q_{n+1} en fonction des termes de F.

  b. Prouver à l'aide de la relation (**??**) que pour tout n entier naturel non nul on a :

$$q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}.$$

  c. En déduire un lien entre la suite de Fibonacci et la suite (u_n) de l'exercice n° 1.

5. Trouver sur internet une formule explicite pour la suite de Fibonacci qui fait intervenir le nombre d'Or.

Bonus : Donner une curiosité trouvée sur la suite de Fibonacci ou le nombre d'Or.