Devoir de mathématiques
– Suite de Héron d'Alexandrie –

Objectif : Le but de ce problème est d'étudier une très vieille méthode pour calculer des valeurs approchées de racines carrées (on dit extraire une racine carrée). On lui donne le nom de méthode de Héron d'Alexandrie (Ier siècle de notre ère) qui l'a exposée mais on a retrouvé une tablette babylonienne (YBC 7289) datant de 3600 ans montrant des valeurs approchées de racine de 2 utilisant cette méthode.

Pour votre culture, Héron avait besoin de calculer des racines carrées car il est par ailleurs connu pour avoir établi une jolie formule pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle quelconque en ne connaissant que ses trois côtés a, b, c (donc sans hauteur connue) :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

La lettre a désignera un nombre positif. On cherche une valeur approchée de $\sqrt{a}$.

I Méthode et exemples

1. Soit x un nombre positif non nul.
Supposons que $x < \sqrt{a}$ (c'est à dire $x^2 < a$). Prouver qu'alors $\dfrac{a}{x} > \sqrt{a}$.
On admet que de même : $x > \sqrt{a} \implies \dfrac{a}{x} < \sqrt{a}$.

2. On choisit un nombre x_0 proche de $\sqrt{a}$. On vient de prouver que $\sqrt{a}$ est compris entre x_0 et $\dfrac{a}{x_0}$.
L'idée brillante est suggérée dans le tableur n° 1 en annexe pour $a = 1492$. J'ai rentré la valeur 40 en B2 pour x_0 et j'ai mis des formules dans les cases grisées que j'ai copiées vers le bas.

- **a.** Déterminer les formules rentrées dans chaque case grisée. Compléter la ligne 4 sur l'annexe'.
- **b.** Quelle(s) cellule(s) faut-il modifier pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{1789}$? Donner l'affichage qu'on obtiendrait pour les mêmes lignes de 1 à 4.

3.
- **a.** Pour simplifier j'ai rempli une feuille de calcul n° 2 à compléter en annexe. Quelle formule ai-je pu mettre dans B3 pour obtenir ces valeurs par copie vers le bas ?
- **b.** En utilisant votre calculatrice et la touche `Ans` (ou `Rép`), quelle expression faut-il rentrer pour obtenir les différentes valeurs approchées après avoir entré 35 ? Compléter alors sur l'annexe les résultats pour la ligne suivante du tableau en soulignant les décimales correctes.

4. On cherche à obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$. On part de $x_0 = 1$ et on considère donc la suite de Héron vérifiant : $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **a.** Calculez à la main x_1, x_2 et x_3 en détaillant bien les calculs de fractions.
- **b.** Présentez vos résultats comme dans le 2e tableau avec en plus une colonne donnant x_n en fraction. On soulignera les décimales correctes. On ira jusqu'à $n = 4$ (calculatrice autorisée pour x_4).

II Algorithme

Décrire ce que fait l'algorithme en annexe réalisé avec Algobox. Le faire tourner à la main pour les entrées : $a = 2$, $x = 2$, $p = 0,01$ puis pour les valeurs de votre choix avec au moins trois chiffres pour a.

III Graphique

Je vous ai tracé en annexe un graphique avec la courbe de la fonction f définie pour $x \in]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ pour une certaine valeur entière mystérieuse de a. En utilisant un des deux points à coordonnées entières placés, déterminer a. J'ai placé x_0 sur l'axe des abscisses, à vous de compléter le graphique de manière à obtenir x_1, x_2,… sur l'axe des abscisses.

I. Exemples. $\sqrt{1492} \approx 38,6264158317$

Tableau n° 1

	A	B	C	D	E
1	n	x_n	$1492/x_n$	*Moyenne*	*différence*
2	0	40	37,3	38,65	2,700000000
3	1	38,65	38,602846	38,6264230272	0,047153946
4	2	38,6264230272			

Tableau n° 2

	A	B	C
1	n	Valeur appr. x_n	Nb. chiffres OK
2	0	35	1
3	1	38,81428571428	2
4	2	38,62687049792	5

Formules :

C2 $=$ D2 $=$ E2 $=$

B3 $=$

Formule : B3 $=$

	A	B	C
5	3		

II. Algorithme mystère.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE x
  LIRE p
  TANT_QUE (x-a/x>p OU x-a/x<-p) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x PREND_LA_VALEUR (x+a/x)/2
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

Pour faire tourner l'algorithme à la main on complètera deux tableaux comme ci-dessous avec les valeurs successives à chaque étape ainsi que si la condition du *tant que* est vérifiée (V ou F selon si elle est vraie ou fausse).
Enfin, donner l'affichage en sortie.

a	2			
x	2			
a/x	1			
Condition	V			

III. Graphique.