Devoir de mathématiques [CORRIGÉ]
– Suite de Héron d'Alexandrie –

Objectif : Le but de ce problème est d'étudier une très vieille méthode pour calculer des valeurs approchées de racines carrées, on lui donne le nom de méthode de Héron d'Alexandrie.

La lettre a désignera un nombre positif. On cherche une valeur approchée de $\sqrt{a}$.

I Méthode et exemples

1. Soit x un nombre positif non nul. Supposons que $x < \sqrt{a}$.

Comme les deux membres sont positifs, leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire : $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

Puis en multipliant les deux membres par a (qui est positif) on ne change pas l'ordre : $\dfrac{a}{x} > \dfrac{a}{\sqrt{a}}$.

Or $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$. D'où le résultat : $\dfrac{a}{x} > \sqrt{a}$. On admet que de même : $x > \sqrt{a} \implies \dfrac{a}{x} < \sqrt{a}$.

2. a. C2 : $\boxed{=1492/B2}$; D2 : $\boxed{=(C2+D2)/2}$; E2 : $\boxed{=B2-C2}$; B3 : $\boxed{=D2}$

b. Il suffit de modifier C2 en mettant `=1789/B2` au lieu de `=1492/B2`. Et de changer la ligne C1 de titre, mais ce n'est pas l'essentiel.

3. a. B3 : $\boxed{=(B2+1492/B2)/2}$. On observe des valeurs rapidement très proches de $\sqrt{1492}$.

b. Avec la calculatrice, on rentre la valeur initiale 35 puis on tape `(Ans+1492/Ans)/2` puis Exe autant de fois qu'on veut pour avoir les termes suivants qui s'approchent de $\sqrt{1492}$.

4. Pour obtenir une suite (x_n) approchant $\sqrt{2}$, on part de $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N};\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$.

a. $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{2}{x_0}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{1}\right) = \dfrac{1}{2} \times 3 = \dfrac{3}{2}$.

$x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{2}{x_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{6} + \dfrac{8}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{17}{6} = \dfrac{17}{12}$.

$x_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{12} + \dfrac{2}{17/12}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{12} + \dfrac{24}{17}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17^2 + 24 \times 12}{17 \times 12}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{289 + 288}{204}\right) = \dfrac{577}{408}$.

b. Pour comparer, je sais que $\sqrt{2} \approx 1,4142135623731$.

n	x_n	valeur approx.	Nb. chiffres
0	1	1	1
1	3/2	1,5	1
2	17/12	1,4166666667	3
3	577/408	1,4142156863	6
4	...	1,4142135623747	12

II Algorithme

Cet algorithme demande a (dont on cherche la racine carrée) une valeur initiale x et une précision p. Tant que la précision p n'est pas atteinte il calcule le terme suivant de la suite de Héron.

On sait qu'on a toujours $\sqrt{a}$ compris entre x et $\frac{a}{x}$ (question 1) donc lorsque $x - \frac{a}{x} < p$ alors x est à moins de p de $\sqrt{a}$ et on l'affiche. Dans l'exemple $p = 0,01$ et au 3e tour de boucle (i.e. $x_2 = 17/12$) l'écart entre $x = 17/12$ et $a/x = 24/17$ vaut moins de $0,005 < 0,01$ donc on affiche $x = 17/12 \approx 1,41666$ qui est une approximation de $\sqrt{2}$ à 0,01 près.

a	2	2	2
x	2	3/2	17/12
a/x	1	4/3	24/17
$x - a/x$	1	0,17	0,005
Condition	V	V	F

III Graphique

On a $f(1) = 2$ donc $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{a}{1}\right) = 2$ soit $1 + a = 4$ donc $a = 3$. La suite va converger vers $\sqrt{3} \approx 1,732$.