Devoir de mathématiques n° 1

Étude d'une famille de fonctions

But du problème : Étudier la famille des fonctions f_a définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_a(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$$

où a est un paramètre réel strictement positif. On suppose fixé $a \in \mathbb{R}^{+*}$. On se fixe un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan dans lequel $\mathcal{C}_a$ désignera la courbe de f_a .

Dans un prochain devoir on montrera que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence

$$q_{n+1} = f_a(q_n)$$

et un premier terme q_0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ converge très vite vers $\sqrt{a}$.

1. Déterminer la parité de la fonction f_a . Quelle symétrie en déduit-on pour $\mathcal{C}_a$?
2. Déterminer les limites de f_a aux bornes de $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire celles aux bornes de $\mathbb{R}^{-*}$ par parité.
3.
 - a. Déterminer le sens de variation de f_a sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.
 - b. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, on a : $f_a(x) \geq \sqrt{a}$.
4. Montrer que $\mathcal{C}_a$ admet la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x$ comme asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. Donner la position relative de $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}^*$.
5. Soit Δ la droite d'équation $y = x$. On pose pour x dans $\mathbb{R}^*$: $d(x) = f_a(x) - x$.
 - a. Étudier le signe de d sur $\mathbb{R}^*$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_a$ et Δ sur $\mathbb{R}^*$.
 - b. Justifier que $\mathcal{C}_a$ coupe Δ en deux points en lesquels la tangente à $\mathcal{C}_a$ est parallèle à l'axe des abscisses.
6. Tracer sur un même graphique $\mathcal{C}_2$, Δ et $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}^*$. Unité graphique : 2 cm.

★ Bonus :

- ① Quelles sont les valeurs possibles pour le coefficient directeur d'une tangente à $\mathcal{C}_a$?
- ② Déterminer en fonction de la valeur du réel k le nombre d'antécédents de k par f_2 . On pourra raisonner graphiquement et/ou par le calcul.