DM suites arithmético-géométrique CORRIGÉ

Exercice n° 12 — Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

On dit que cette suite est arithmético-géométrique.

1. Quelle est l'expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$?
2. Déterminer le point fixe α de f qui vérifie $f(\alpha) = \alpha$. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \alpha$.
3. Prouver que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = f(u_n) - f(\alpha)$ en déduire que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
4. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Solution

1. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$. C'est une fonction affine.
2. $f(x) = x \iff \frac{1}{2}x + 2 = x \iff 2 = x - \frac{1}{2}x \iff \frac{1}{2}x = 2 \iff x = 4$.
   Il y a un unique point fixe pour f qui est $\alpha = 4$.
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - \alpha$ donc au rang $n+1$ on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha$.
   Or $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\alpha = f(\alpha)$ donc on a bien pour tout n dans $\mathbb{N}$:
   $v_{n+1} = f(u_n) - f(\alpha)$. On remplace avec l'expression de f :
   $$v_{n+1} = f(u_n) - f(\alpha) = \frac{1}{2}u_n + 2 - \left(\frac{1}{2}\alpha + 2\right) = \frac{1}{2}(u_n - \alpha) + 2 - 2 = \frac{1}{2}v_n$$
   C'est plus élégant et simple ainsi en gardant α. Voici cependant un calcul possible en remplaçant α par 4 :
   $$v_{n+1} = f(u_n) - f(\alpha) = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(v_n + 4) - 2 = \frac{1}{2}v_n + \frac{4}{2} - 2 = \frac{1}{2}v_n$$
   Ainsi pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   Son premier terme est $v_0 = u_0 - \alpha = u_0 - 4$.
4. On sait donc que $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Et comme $v_n = u_n - \alpha$ on a $u_n = v_n + \alpha$ et on obtient donc l'expression :
   $$u_n = \alpha + (u_0 - \alpha) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 + (u_0 - 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$