

Devoir de mathématiques

– Méthode de la tangente –

La méthode de la tangente (ou méthode de NEWTON) sert à déterminer une valeur approchée d'une racine d'une fonction f dérivable sur un intervalle dont on notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère du plan. Sous certaines conditions, on peut prouver que l'on obtient une suite (x_n) qui converge très vite vers une solution de $f(x) = 0$.

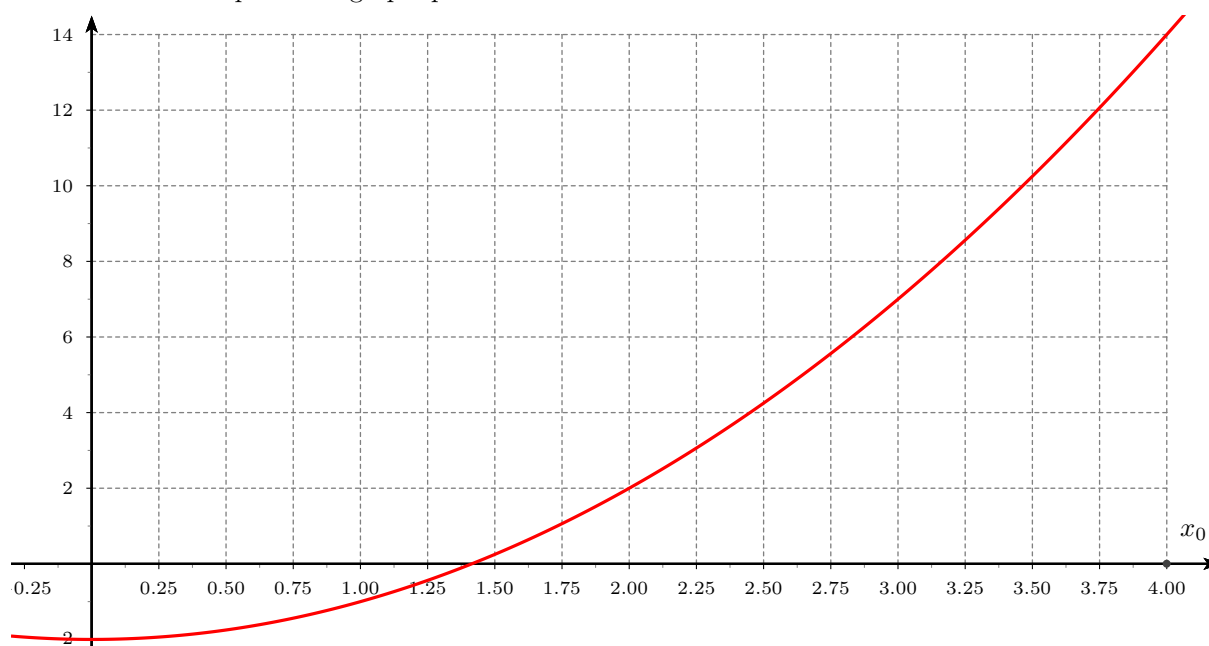
Méthode de NEWTON :

- ① On part d'une valeur approchée x_0 de la solution.
- ② On trace $\mathcal{T}_0$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 .
- ③ Supposons que $\mathcal{T}_0$ coupe l'axe des abscisses en un réel noté x_1 .
- ④ Retour à l'étape ① avec x_1 au lieu de x_0 , et on trouve x_2 . etc

1. On a tracé ci dessous la courbe de la fonction f d'expression $f(x) = x^2 - 2$. Quelle est la valeur exacte de la racine que l'on voit ?
2. On part de $x_0 = 4$. Déterminer par le calcul l'équation de $\mathcal{T}_0$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 4$ et prouvez que $x_1 = 2, 25$.
3. Déterminer par le calcul l'équation de $\mathcal{T}_1$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_1 et en déduire x_2 .
4. a. Complétez le graphique ci-dessous en traçant la suite de segments joignant les points de coordonnées $(x_0; 0)$, $(x_0; f(x_0))$, $(x_1; 0)$, $(x_1; f(x_1))$, $\dots$, $(x_n; 0)$, $(x_n; f(x_n))$, $(x_{n+1}; 0) \dots$
 b. Graphiquement, la suite (x_n) semble-t-elle converger ?
 c. Que se serait-il passé si on avait choisi $x_0 = 0$?
5. ★ Toujours dans le cas où $f(x) = x^2 - 2$, et $x_0 \neq 0$ prouvez que : $\forall n \in \mathbb{N}; x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$
OMG ! On retrouve la suite de Héron d'Alexandrie connue depuis l'antiquité !!
6. Application à la calculatrice. Après avoir entré la première valeur, que faut-il taper utilisant la touche **Ans** (ou **Rép**) pour obtenir les valeurs successives de la suite (x_n) ?
7. ★ Pour une fonction f et un x_0 quelconques auxquels on applique la méthode de NEWTON.
 a. Prouvez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- b. Quelle condition apparait avec cette formule pour que cette suite soit définie ? On en donnera une interprétation graphique.



Bonus : Pour $f(x) = x^2 - 2$, prouvez que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de chacune de ses tangentes. (i.e. quel que soit le point d'abscisse a où on regarde la tangente).