Devoir de mathématiques n^o 3
Point d'inflexion

Exercice n^o 1 — Défi ! n^o 61 p.35

a et b sont deux réels. Comparer les nombres :

$$\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$$

Donner une interprétation graphique (on attend un schéma avec la courbe de la fonction exponentielle).
Indications : Pour comparer deux réels strictement positifs, on peut comparer leur rapport et le nombre 1. L'étude de la fonction cosinus hyperbolique vue en classe peut être utile.

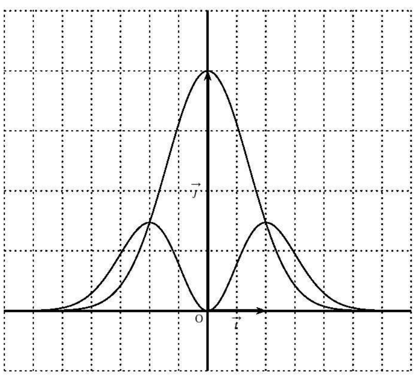
Exercice n^o 2 — The bell curve

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2}.$$

On note respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, dont les tracés se trouvent ci–dessous.

1. Identifier $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur la figure fournie. (Justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g.
3. Étudier le sens de variation de f et de g. Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Exercice n^o 3 — Point d'inflexion

La fonction f considérée dans cet exercice est définie et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. La lettre a désigne un réel dans I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère du plan.

Définition. *On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un* point d'inflexion *au point d'abscisse a si f' change de sens de variation en a.*

On veut prouver la propriété suivante :

Propriété. *Si $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a, alors T_a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a traverse la courbe $\mathscr{C}_f$.*

L'expression « T_a traverse la courbe $\mathscr{C}_f$ » signifie que les positions relatives de T_a et $\mathscr{C}_f$ changent à l'abscisse a.

1. On suppose que f est deux fois dérivable (*i.e.* f'' existe) que devient la définition du point d'inflexion ?
2. Pour prouver la propriété, on traitera le cas où f' est décroissante avant a puis croissante après a. On pose la fonction g définie sur I par :

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

Établir la propriété, en s'aidant du tableau ci–dessous à compléter.

x		a	
Signe de $g''(x)$			
Variations de $g'(x)$			
Variations de $g(x)$			
Signe de $g(x)$			

Bonus : Does the bell curve $\mathcal{C}_f$ shown in exercise number **2.** have an inflexion point at $x = 1$? How is the point of $\mathcal{C}_g$ at $x = 1$ called in english ?