Fonctions continues

I Continuité

I.1 Définitions, exemples et contre exemples

La continuité est une notion de *régularité* des fonctions. En voici une définition heuristique :

Définition 1. On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I lorsque f est définie sur I et que sa courbe sur I peut se tracer « sans lever le crayon ».

Remarque. Cette définition est évidement uniquement intuitive, une *vraie* définition utilise les limites en un point (cf définition suivante).

Définition 2. On dit qu'une fonction f est continue en a ($a \in \mathbb{R}$) si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

① f est définie en a.

② $f(x)$ admet une limite quand x tend vers a.

③ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

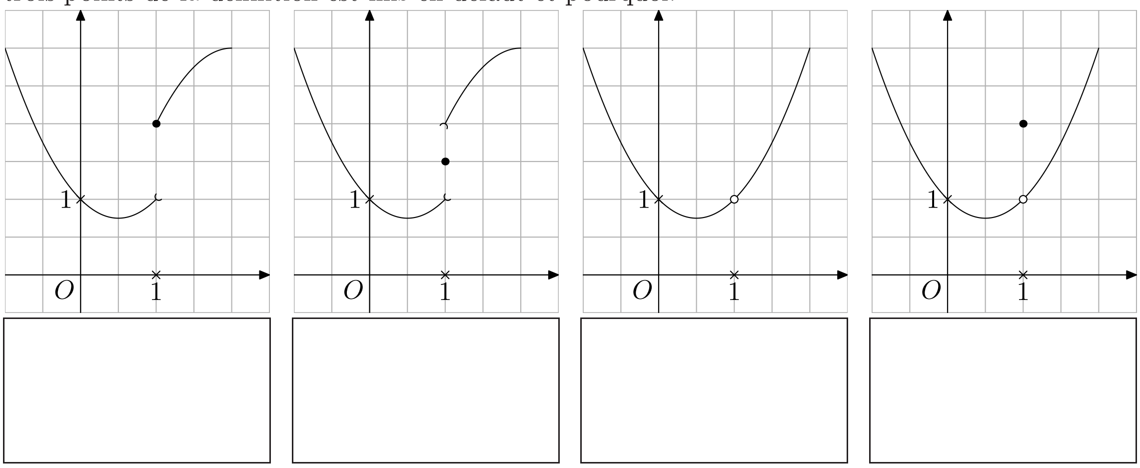
Si l'une quelconque de ces trois conditions n'est pas vérifiée, on dit que f n'est pas continue en a, ou qu'elle présente une discontinuité en a.

Remarque. Parfois le comportement d'une fonction f est différent à gauche et à droite d'un réel a. Il pourra alors être utile pour étudier l'existence d'une limite en a d'étudier les éventuelles limites à gauche et à droite de a, *i.e.* :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

Si ces limites existent, alors, dire que f est continue en a revient à dire que ces deux limites sont égales à $f(a)$.

Les quatre fonctions f représentées ci–dessous présentent une discontinuité en 1. Dire lequel des trois points de la définition est mis en défaut et pourquoi.



Définition 3. On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I lorsque f est continue en tout réel a de I.

Convention Dans un tableau de variation, lorsqu'on note une flèche pour une fonction croissante (ou décroissante) sur un intervalle, cette flèche signifie aussi la continuité de la fonction sur l'intervalle. On mettrait une double barre en un point de discontinuité.

Propriété 1. *Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*

⚠ La réciproque est fausse. Contre–exemple : La fonction valeur absolue. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0. La dérivabilité est donc une notion de régularité plus forte que la continuité.

Démonstration. (Du contre–exemple) $|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geqslant 0, \\ -x & \text{if } x \leqslant 0. \end{cases} \implies \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0, \\ -1 & \text{if } x < 0. \end{cases}$
Le taux de variation de la valeur absolue en 0 a une limite à gauche qui vaut -1, et une limite à droite qui vaut 1. Donc la limite en 0 n'existe pas.

□

Démonstration. On écrit l'approximation affine avec une fonction ε telle que : $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \varepsilon(x)$$

□

Propriété 2. *(Admise) Les fonctions usuelles : polynômes, racine carrée, valeur absolue, fractions rationnelles,* sin, cos,*(bientôt* exp *et* ln*) et leurs composées sont continues sur les intervalles où elles sont définies.*

Cette propriété permet de justifier la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle.

Exemple: Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2-1}$. f est définie dès que x^2-1 est positif donc sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[1\,;+\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, f est la composée de la fonction racine (continue sur $\mathbb{R}^+$) et d'un polynôme (donc continu sur $\mathbb{R}$). Ainsi f est continue sur les intervalles $]-\infty\,;-1]$ et $[1\,;+\infty[$. La phrase « *f est continue sur les intervalles* $]-\infty\,;-1]$ *et* $[1\,;+\infty[$ *comme composée de fonctions continues* » est plus vague mais suffira.

Cependant il existe des fonctions qui ne sont pas continues :

I.2 La fonction partie entière

Définition 4. On appelle partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x. *i.e.* $E(x)$ est l'entier n tel que : $n \leqslant x < n+1$

Exemples: $E(2,36) = 2$; $E(2) = 2$; $E(\pi) = 3$; $E(-2,36) = -3$

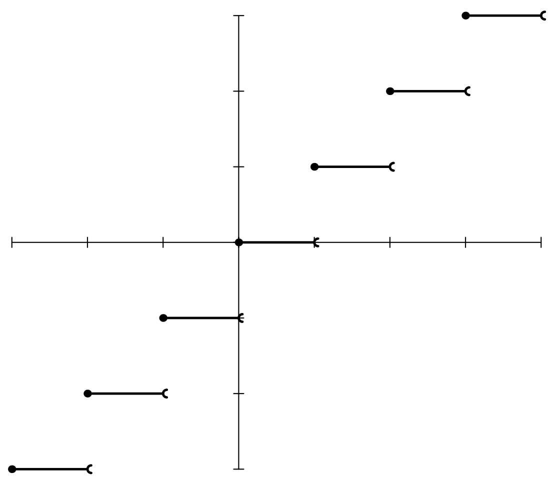
Propriété 3. *Pour tout entier n, sur l'intervalle $[n\,;n+1[$, la fonction partie entière est constante égale à n. Elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une discontinuité pour chaque entier.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition de E, pour $x \in [n\,;n+1[$ on a $E(x) = n$. Prouvons la discontinuité de E en $n+1$. Par passage à la limite (en restant dans l'intervalle $[n\,;n+1[$) :

$$\lim_{\substack{x\to n+1 \\ x<n+1}} E(x) = n \neq E(n+1) = n+1$$

□

On en déduit la courbe de la fonction partie entière, on dit que c'est une fonction en escalier.



I.3 Prolongement par continuité

Exemple: La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ car non définie en 3, mais :

$$x \neq 3 \implies f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$$

Ainsi la courbe de f est la droite d'équation : $y = x + 3$ à laquelle il manque le point d'abscisse 3. On pose alors la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$:

$$\widetilde{f}(x) = x + 3. \quad \text{donc} \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 3, \\ 6 & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors continue sur $\mathbb{R}$, on dit que c'est un prolongement de f par continuité en 3.

Exemple: La fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ n'est pas définie en zéro, mais on a vu que sa limite en zéro existe et vaut 1. On peut « prolonger la fonction f par continuité » en 0, en posant la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $\tilde{f}(0) = 1$

II Théorème des valeurs intermédiaires

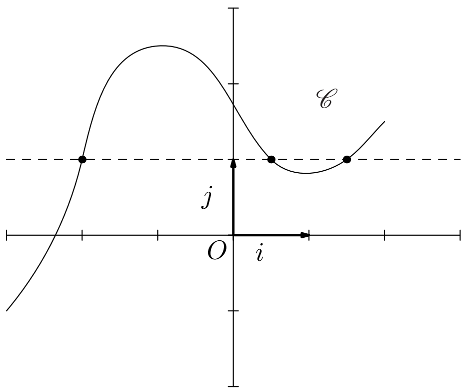
Théorème 1. Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit λ un réel compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a\,;b[$.*

Remarque. Si la fonction n'est pas continue, cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée. La fontion partie entière fournit un contre exemple : $E(0) = 0$ et $E(1) = 1$ mais l'équation $E(x) = 0,5$ n'a pas de solution dans $]0\,;1[$ (ni ailleurs).

Propriété 4 (Cas particulier important : $\lambda = 0$)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a\,;b[$*

C'est un cas particulier, mais en fait cette propriété est équivalente au théorème des valeurs intermédiaires, et on la démontre par dichotomie en utilisant des suites adjacentes qui convergent vers une racine de f. (cf TD)
Ces propriétés nous garantissent l'existence de solutions pour des équations mais ne nous fournissent pas les solutions, ni leur unicité, juste des intervalles où elles se trouvent. On peut donc avec la calculatrice trouver des encadrements à la précision souhaitée des solutions cherchées.

Exemple: Sur le graphique ci-dessous, on a une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction continue f sur l'intervalle $[-3\,;2]$. On a $f(-3) = -1$ et $f(2)$ =1,5. Comme la valeur $\lambda = 1$ est comprise entre -1 et 1,5 le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution (ici il y en a trois) sur l'intervalle $]-3\,;2[$. Autrement dit, la courbe $\mathscr{C}$ coupe la droite d'équation $y = 1$ sur cet intervalle.



En pratique, la simple lecture d'un tableau de variation permet de répondre aux questions du type : "Combien l'équation $f(x) = \lambda$ admet elle de solutions ? Donner des encadrements de ces solutions." Rappel : on admet qu'une flèche dans un tableau de variation traduit aussi la continuité de la fonction sur l'intervalle en question. La version suivante du théorème des valeurs intermédiares permet de garantir l'unicité de la solution :

Théorème 2 (Utile en pratique[1]). *Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\,;b]$. Soit λ un réel tel que : $f(a) < \lambda < f(b)$. Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une* **unique** *solution dans l'intervalle ouvert $]a\,;b[$.*

Démonstration. Laissé en exercice : On sait qu'il existe une solution α par le TVI. Prouvons qu'elle est unique : Comme f est strictement croissante sur $[a\,;b]$, pour x de cet intervalle on a :

$$x < \alpha \implies f(x) < 0 \quad \text{et} \quad x > \alpha \implies f(x) > 0$$

□

Remarque. Il existe évidemment un énoncé similaire pour une fonction strictement décroissante...

Exemple: Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 + x + 7$. Justifier que $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;1]$. Réponse d'un bon élève :
f est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme). Or $f'(x) = 5x^4 + 1$ et x^4 est positif donc la dérivée de f est strictement positive, donc f est strictement croissante sur $[-2\,;1]$. De plus $f(-2) = -33 < 0$ et $f(1) = 9 > 0$. Donc $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2\,;1]$. D'après le tableau de variation de f et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ on en déduit aussi que $f(x) = 0$ admet en fait une unique solution dans $\mathbb{R}$.
Il est par contre imposible de résoudre par le calcul cette équation, mais pouvez vous à l'aide de la calculette déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} du réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$. Trois méthodes :

Méthodes de résolution approchée de $f(x) = \lambda$

- Graphiquement, en zoomant de plus en plus sur le point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses (pour $\lambda = 0$) ou avec la droite d'équation $y = \lambda$.
- Mieux encore, certaines calculettes disposent d'un outil de résolution graphique (G-solv pour Casio, CALC quand on est dans l'interface graphique avec une Texas Instruments) il faut choisir *isect* pour l'intersection de deux courbes que l'on doit sélectionner (la courbe de f et la droite d'équation $y = \lambda$ si on veut résoudre $f(x) = \lambda$) ou *Root* si on cherche une racine.
- En utilisant le tableau de valeurs que l'on doit paramétrer correctement. *pitch* (Casio) ou ΔTbl (TI) donne le pas de la variation de X, donc la précision voulue. Mais il faut d'abord connaitre un vague encadrement de la solution (par une méthode graphique par exemple)
- À l'aide d'un programme adapté, comme celui que nous allons établir qui fonctionne par dichotomie. On peut utiliser la méthode de Newton-Raphson ou méthode de la tangente[2] (plus rapide)

Cas des fonctions définies sur des intervalles non bornés. On a raisonné sur des intervalles fermés bornés, on peut ensuite étendre les résultats à des intervalles non bornés, en utilisant les limites de f aux bornes de son intervalle de définition à la place de $f(a)$ ou $f(b)$.

Exemple:

Combien l'équation f a–t–elle de racines sur $\mathbb{R}$ et préciser dans quels intevalles. On note α et β ces deux racines avec $\alpha < \beta$. Donner le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

[1] On dit dans ce cas que f réalise une *bijection* croissante de $[a\,;b]$ dans $[f(a)\,;f(b)]$. C'est pourquoi cette propriété est parfois appellée « théorème de la bijection ».

[2] $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Cette suite converge vers une racine si elle existe, prendre x_0 assez près de la racine.