Nombre dérivé — Attendus et complément.

Sur le chapitre **Nombre dérivé** je dois savoir :

① traduire en terme de coefficient directeur de tangente une égalité du type $f'(3) = 5$. (La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 a un coefficient directeur de 5).

② tracer une tangente sachant $f(a)$ et $f'(a)$.

③ lire sur un graphique où les tangentes sont tracées des nombres dérivés (exos 2 et 3)

④ dériver les fonctions de référence : polynômes, $\sqrt{x}$, $1/x$. (Exos 14, 15)

⑤ déterminer l'équation d'une tangente, et donc connaître la formule. (Exo 8)

⑥ $(R\heartsuit C)$ démontrer que pour $f(x) = x^2$ on a $f'(x) = 2x$ en utilisant le taux d'accroissement. (Exo 12)

⑦ faire un exercice plus complexe avec des paramètres à déterminer comme les exercices de raccords de courbes (Exos 10, 11)

Exercice nº 10 — **Rampe de skate**

Une rampe de skateboard est modélisée de la manière suivante :

- une partie horizontale sur l'intervalle $[0 ~;~ 1]$;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1 ~;~ 5]$ représentant la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$;
- un segment de droite sur l'intervalle $[5 ~;~ 6]$ avec $C(5 ~;~ 1,8)$ et $D(6 ~;~ 2,7)$;
- les raccordements aux points B et C se font sans cassure.

À l'aide des renseignements fournis, déterminer les valeurs de a, b et c.

Solution

On traduit les quatre contraintes : $f(1) = 0$, $f(5) = 1,8$, $f'(1) = 0$ et $f'(5) = 0,9$.
Or $f(x) = ax^2 + bx + c$ donc $f'(x) = 2ax + b$. On obtient quatre équations à trois inconnues a, b, c.

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0 \\ f(5) & = & 1,8 \\ f'(0) & = & 0 \\ f'(5) & = & 0,9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} a+b+c & = & 0 & (1) \\ 25a+5b+c & = & 1,8 & (2) \\ 2a+b & = & 0 & (3) \\ 10a+b & = & 0,9 & (4) \end{array}$$

Les deux dernières équations (3) et (4) sont plus simples puisque sans c. On résout donc d'abord ce système :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} 2a+b & = & 0 & (3) \\ 10a+b & = & 0,9 & (4) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcll} 2a+b & = & 0 & (3) \\ 8a & = & 0,9 & (4)-(3) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & -2\times 0,9 \div 8 \\ a & = & 0,9 \div 8 \end{array} \right.$$

Ainsi , nécessairement : $\boxed{a = 0,1125}$ et $\boxed{b = -0,225}$. On détermine alors c avec (1) :

$c = 1 - a - b = 1 - 0,1125 + 0,225 = 0,1125$. Ainsi, nécessairement : $\boxed{c = 0,1125}$.

On doit encore vérifier que l'équation (2) est satisfaite avec ces valeurs :

$25 \times 0,1125 + 5 \times (-0,225) + 0,1125 = 1,8$. Ouf !

La fonction f qui donne la courbe de la rampe de skate sur $[1; 5]$ a pour expression :

$$\boxed{f(x) = 0,1125x^2 - 0,225x + 0,1125}$$