Projections et cosinus

Exercice nº 9 —— **Al–Kashi**

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60°$. Calculez BC

Solution :

$CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ donc :
$CB^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos(60) = 16 + 9 - 24 \times \frac{1}{2} = 25 - 12 = 13$ donc $BC = \sqrt{13}$.

Exercice nº 10 ——

$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O, calculez les produits scalaires par la méthode de votre choix :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -16$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$
3. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
5. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 16$
6. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
7. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$
8. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -8$
9. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AD} = -8$

8. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -OA \times OC = -OA^2 = -(AC/2)^2 = \ldots$
$= -AC^2/4$. Or $AC^2 = 4^2 + 4^2 = 32$ (Pythagore), d'où :
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -32/4 = -8$.

9. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AD} = -8$ par projection de $\overrightarrow{OB}$ sur $\overrightarrow{AD}$ soit (-4×2) ou bien en projetant $\overrightarrow{AD}$ sur $\overrightarrow{OB}$ ce qui redonne $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -8$.

Exercice nº 11 ——

On considère un triangle ABC où $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60°$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
   On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Solution :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos(60) = 5 \times 6 \times 0.5 = 15$.
$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{CB} = CB^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = CB^2 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6^2 - 15 = 21$

Formule avec longueurs uniquement

Exercice nº 12 ——

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. En développant $(\vec{u} - \vec{v})^2$ retrouver la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$.
2. Déterminer une formule analogue faisant intervenir $||\vec{u} + \vec{v}||^2$
3. Tracez un parallélogramme où on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Traduire les deux relations précédentes pour $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec les longueurs de la figure.

Solution :

1. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v}$. Soit :
$2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$.
Pour tout vecteur $\vec{w}$ on a : $\vec{w}^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = ||\vec{w}||^2$. D'où :
$2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$. Puis :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$$

Si on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ alors :
$\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ et donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

Ainsi on peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en connaissant uniquement les trois côtés du triangle ABC.

2. De même : $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \times \vec{u} \cdot \vec{v}$. Soit :
$2 \times \vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u}^2 - \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$. Donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Si on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ où $ABDC$ est un parallélogramme et on a donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right)$$

Ainsi on peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en connaissant uniquement les deux côtés du parallélogramme $ABDC$ ainsi qu'une diagonale. (Ce qui peut se ramener à la situation du **1.**)

Exercice nº 14 ——

On considère un parallélogramme $ABCD$ où $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{15}$ et $AD = \sqrt{6}$

1. Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
2. En déduire $\widehat{BAD}$

Solution :

Application directe de l'exercice précédent mais attention ici les côtés sont AB et AD et la diagonale est AC. Il faut échanger C et D dans la formule.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - AD^2\right)$
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(15 - 6 - 3) = 3$

2. On écrit ce produit scalaire d'une autre manière :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos\left(\widehat{BAD}\right)$

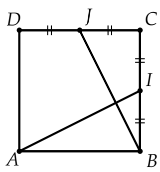
Donc : $\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{AB \times AD}$

Cette formule est d'ailleurs générale, on simplifie :
$\cos\left(\widehat{BAD}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}^2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où $\widehat{BAD} = 45°$.

Exercice nº 17 —— **Orthogonalité. (Chasles)**

$ABCD$ est un carré. On note I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.
Développer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ})$, pour prouver que : $(AI) \perp (BJ)$.



Solution :

$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ})$
$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CJ}$
$= 0 - AB \times CJ + BI \times BC + 0 = -AB \times \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} \times BC$
$= -AB^2/2 + AB^2/2 = 0.$ (Car $BC = AB$!).
Ainsi $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = 0$ donc : $(AI) \perp (BJ)$.