

EXERCICE 1**6 points****Partie A : restitution organisée de connaissances (ROC)**

– *Connaissances utilisables :*

- Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombres réels. On note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - bi$.
- Pour tous nombres complexes z et z' , $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

– *Démonstration à rédiger :*

Pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z : $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, U, V) d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$
2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2\sqrt{3} \quad z_B = 3 + i\sqrt{3} \quad z_C = 3 - i\sqrt{3}$$

Écrire z_A , z_B et z_C sous forme trigonométrique.

3. Justifier que A, B et C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ de centre O dont on précisera le rayon.
4. Soit D le point d'affixe $2i$. Prouver que le cercle Γ de centre D et de rayon 4 passe par le point A.
5. En déduire une construction des trois points A, B et C avec pour seuls outils une règle non graduée et un compas. Faire la figure, sur la feuille annexe (page 6), en laissant les traits de construction visibles.
6. Déterminer la nature du triangle ABC .

EXERCICE 2**3 points**

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = e^{-x}.$$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E') \quad y' + y = 0$$

Résoudre l'équation différentielle (E').

3. Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').
4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

EXERCICE 3**5 points**

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement :

- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n -ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongoir lors de son n -ième passage. »

1. a. Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

- b. Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

2. On considère maintenant la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'événement T_n .

- a. Compléter l'arbre fourni sur la feuille annexe (page 5).
- b. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.
- b. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- c. Calculer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 4**6 points****Partie 1**

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. En remarquant que $g(x) = e^x(1 - x) + 1$ déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier le signe de la dérivée g' de la fonction g .
3. Dédire de la question précédente le tableau de variations de g en le complétant avec les limites aux bornes.
4.
 - a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'arrondi au centième de α .
 - c. Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
5. Dédire des questions 3 et 4.a le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ telle que $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0 ; +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (voir page 5).

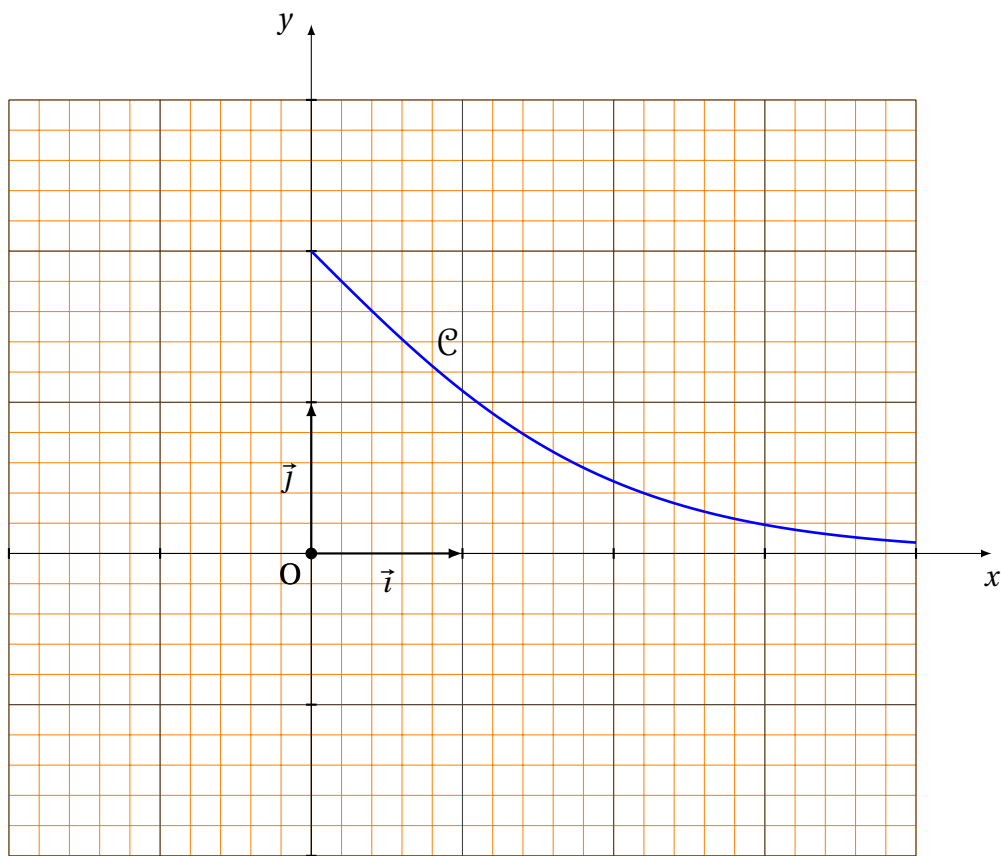
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

- M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x ; f(x))$,
- P le point de coordonnées $(x ; 0)$,
- Q le point de coordonnées $(0 ; f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α . *On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.*
2. On suppose dans cette question que le point M a pour abscisse α . La tangente (T) en M à la courbe $\mathcal{C}$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

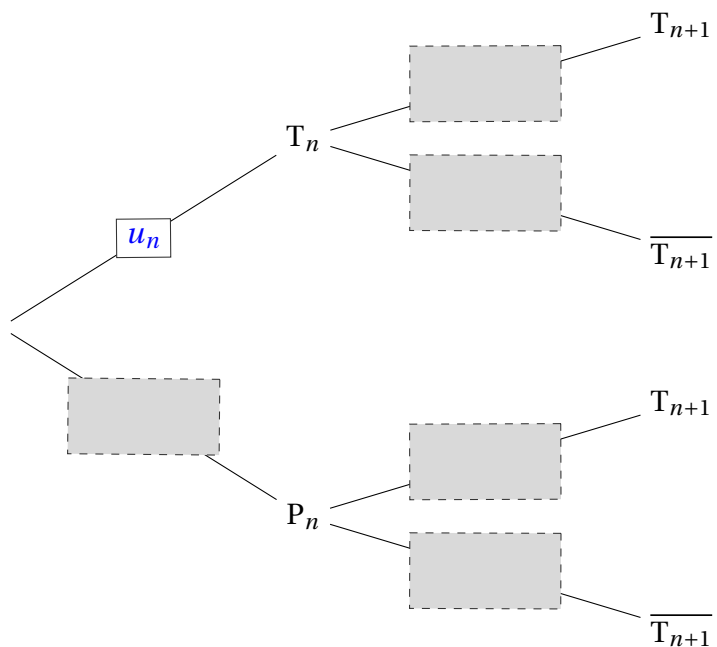
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La représentation graphique de l'exercice 4



Annexe à rendre avec la copie

Arbre de l'exercice 2



NOM :

Prénom :

Annexe à rendre avec la copie**Construction de l'exercice 1**