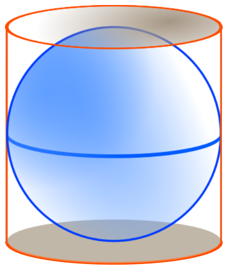
Archimède
et
le volume de la sphère.

Vincent PANTALONI

4 juin 2012

Dans son ouvrage *De la sphère et du cylindre* ($\approx$ 225 av. J.C.) Archimède est le premier à établir les volumes et surfaces de la boule et des cylindres. En particulier il montra que le cylindre circonscrit à une sphère a un volume qui vaut une fois et demi celui de la boule. Archimède est si fier de ce dernier résultat qu'il demande que soit gravé sur sa tombe le dessin d'une sphère inscrite dans un cylindre. Nous allons voir comment il établit ce résultat à partir du principe mécanique du levier qu'il avait aussi découvert.



1 Principe du levier.

Archimède étudia les leviers et en énonça les propriétés sous formes de principes.

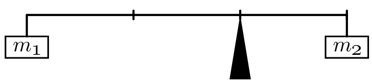
Principe 1. *Des masses qui s'équilibrent à des distances égales sont égales.*

Principe 2. *Des masses égales à des distances différentes ne sont pas en équilibre et penchent du côté de la masse qui est à la plus grande distance.*

Principe 3. *Des masses inégales à des distances proportionnelles sont en équilibre.*

Les deux premiers principes semblent évidents, le dernier l'est moins et demande un peu de précisions. Par ailleurs il regroupe en fait les deux premiers principes comme cas particuliers. De nos jours on utilise la notion de moment d'une force pour expliquer cette notion.

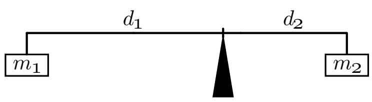
Par exemple sur cette figure où un bras est deux fois plus long que l'autre, si les masses sont égales, il est clair (cf principe 2), que c'est le bras gauche le plus long qui va descendre. Ce que dit le principe 3 c'est que pour qu'il y ait équilibre il faut que $m_2 = 2 \times m_1$.



On remarque que la proportionalité évoquée par Archimède doit être dans le sens inverse entre les masses et les longueurs des bras du levier. Plus généralement :

Les masses sont en équilibre ssi

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{m_1}{m_2} \tag{1}$$

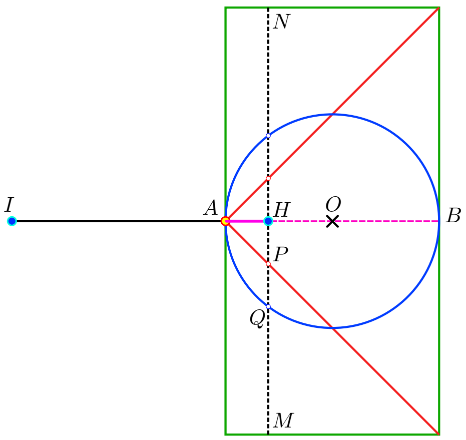


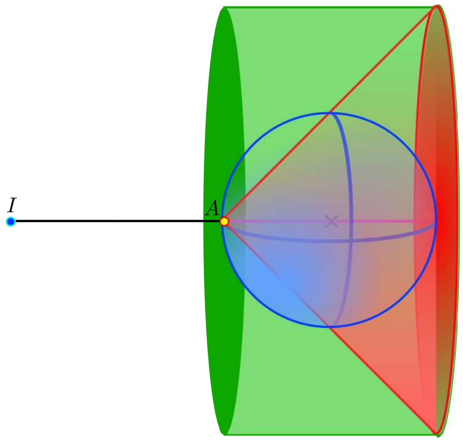
Cela revient à dire que les moments $m_1 d_1$ et $m_2 d_2$ sont égaux.

Archimède utilisa cette propiété pour comparer le volume d'une sphère et celui de son cylindre circonscrit en passant par un argument de géométrie plane.

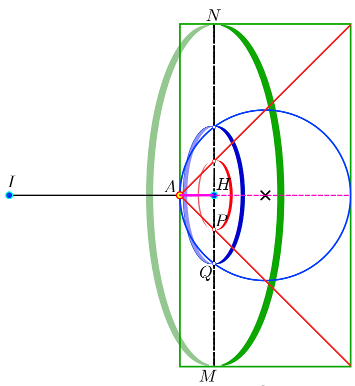
2 Un levier pour comparer des volumes.

L'idée est de partir de la figure ci-dessous à gauche où A est le milieu de $[IB]$ et où le rectangle vert est un double carré, puis d'effectuer une rotation autour de l'axe de symétrie (IA) de sorte que le cercle bleu de centre O donne naissance à une sphère, le rectangle vert à un cylindre et le triangle rouge à un cône de sommet A.





Pour comparer les volumes Archimède considère la coupe selon la droite (MN) et les disques obtenus après rotation. On obtient trois tranches de la sphère, du cylindre et du cône qui sont des cylindres de même épaisseur infinitésimale comme l'aurait dit Leibnitz et dont les volumes sont proportionnels à la surface de leur base, c'est à dire proportionnels au carré de leur rayon, soit à HP^2, HQ^2 et HM^2 pour respectivement les tranches du cône, de la sphère et du cylindre vert. On cherche donc une relation entre ces trois longueurs au carré : HP^2, HQ^2 et HM^2

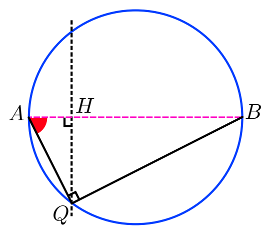


Pour cela on a besoin d'un petit résultat classique sur les triangles semblables. On extrait la figure suivante pour y voir plus clair. Remarquons que le triangle AQB est rectangle en Q puisque $[AB]$ est un diamètre du cercle

Les triangles AHQ et AQB sont donc semblables (deux angles en commun : un droit et le rouge $\widehat{BAQ}$). Par conséquent les rapports $\dfrac{AH}{AQ}$ et $\dfrac{AQ}{AB}$ sont égaux.

On peut aussi les voir comme $\cos(\widehat{BAQ})$. Ainsi on a :

$$AH \times AB = AQ^2 \tag{2}$$



D'après le théorème de Pythagore dans AHQ, on a donc en remplaçant dans (2) :
$AH \times AB = HQ^2 + AH^2$ et puisque AHP est isocèle et que $AB = HM$ on a :

$$AH \times AB = HQ^2 + HP^2 \tag{3}$$

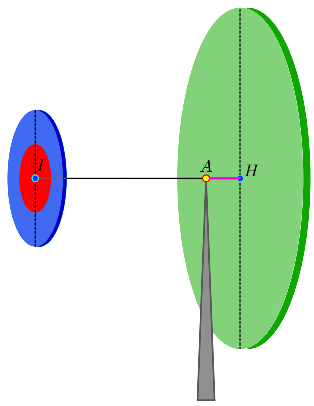
L'idée d'Archimède est d'utiliser un levier où le point d'appui est A et de bras $[AI]$ et $[AH]$. On calcule donc le rapport :

$$\frac{IA}{AH} = \frac{HM}{AH} = \frac{HM^2}{AH \times HM} = \frac{HM^2}{HQ^2 + AH^2} \qquad \text{par (3)}$$

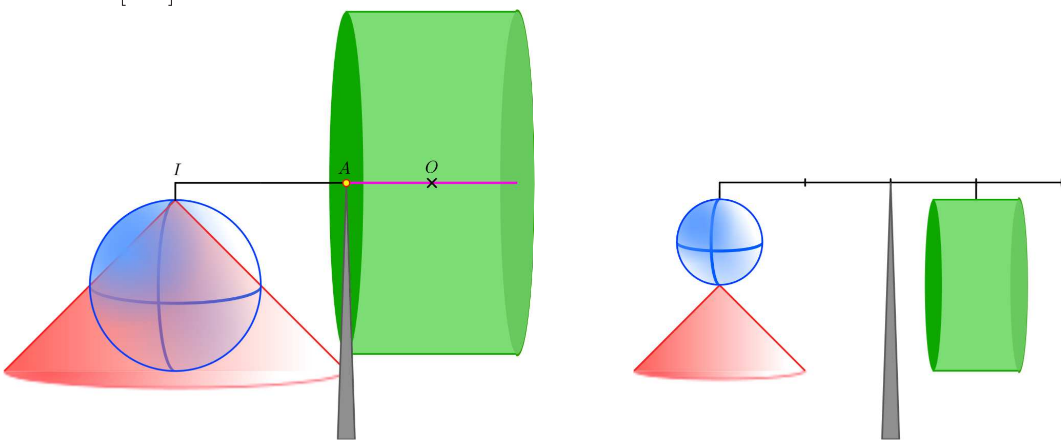
On a ainsi obtenu le résultat clef :

$$\boxed{\frac{IA}{AH} = \frac{HM^2}{HQ^2 + AH^2}}$$

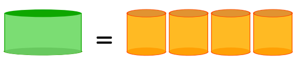
qui est à interpréter en termes de leviers en comparant avec (1) $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{m_1}{m_2}$. Cela signifie que nos tranches s'équilibrent si on les dispose comme sur la figure ci-contre.



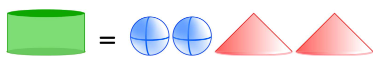
Si maintenant on considère l'ensemble de ces tranches en faisant varier la coupe selon (MN) avec H décrivant tout le segment $[AB]$ on obtient que le cône et la boule accrochés en A qui est fixe s'équilibrent avec le cylindre vert accroché en son centre de gravité qui est O, le milieu de $[AB]$ comme sur les schémas ci-dessous.



Or $\frac{IA}{AO} = 2$ donc la masse (ou le volume en imaginant les solides homogènes et de même densité) du cylindre vaut deux fois celle de la boule additionnée à celle du cône. Pour se ramener au cylindre circonscrit à la sphère on remarque que si on double le rayon de la base sans changer la hauteur, on multiplie par $2^2 = 4$ le volume du cylindre, donc le cylindre vert a un volume valant celui de quatre cylindres circonscrits à la sphère. Schématiquement on a donc les résultats suivants :

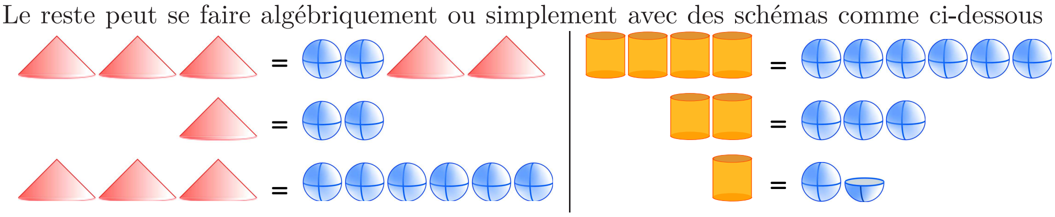


et



De plus Archimède savait que le volume d'un cône valait le tiers du volume du cylindre de même base et hauteur.

Le reste peut se faire algébriquement ou simplement avec des schémas comme ci-dessous :



Ainsi, sans véritablement calculer les volumes, mais en les comparant avec une abstraction de l'objet physique qu'est le levier, Archimède réussit à établir que le cylindre circonscrit à une sphère avait un volume qui valait une fois et demi celui de la boule. Ou dans l'autre sens que le volume de la boule vaut deux tiers de celui du cylindre. Il manque donc un tiers du volume du cylindre une fois mise la boule dedans, ce qui correspond au cône de même base et même hauteur, ou à deux cônes de même base et de hauteur moitié, comme schématisés ci-contre en rose.