Activité 1 CHUTE LIBRE ET VITESSE INSTANTANÉE

Une bille est lâchée de l'Empire State Building à 320 m au dessus du sol.

Quelle est la vitesse de la bille au moment de l'impact ?

Partie A. *Approche physique*

En sciences physiques on établit (merci Galilée et Newton) que la distance (en m) parcourue par un corps en chute libre, sans tenir compte de la résistance de l'air, en fonction du temps (en s) est : $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ où $g \simeq 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur. On considère donc la fonction d'expression : $\boxed{f(t) = 5t^2}$

1. Déterminer le temps mis par la bille pour arriver au sol. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

2. a. Calculer la vitesse moyenne de la bille depuis l'instant du lâcher jusqu'au moment de l'impact, en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ puis en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Est-ce une bonne estimation de la vitesse au moment de l'impact ?

b. Proposer une meilleure estimation. Est-il dangereux de se prendre la bille sur la tête ?

Partie B. *Approche mathématique*

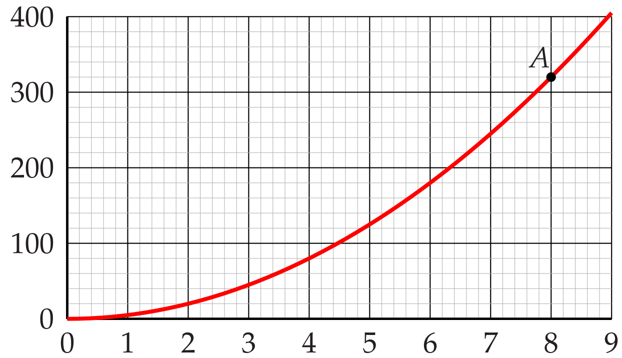
On donne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.
Sur cette courbe, on considère le point A d'abscisse 8.

1. Étude graphique

a. Soit M le point de la courbe d'abscisse 0. Que représente le coefficient directeur de (AM) ?

b. Même question avec le point M d'abscisse 7, puis 7,5, puis 7,9, puis. . .

c. Tracer la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe au point A, c'est-à-dire la droite « touchant » localement la courbe une seule fois en A, avec la plus grande précision. Que représente son coefficient directeur ? Le lire le plus précisément possible.



2. Étude algébrique
Le but est de calculer le coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$ à la courbe de la fonction d'expression : $f(t) = 5t^2$.
On considère M est un autre point de la courbe, « assez proche de A », c'est-à-dire d'abscisse $8 + h$, avec h « assez proche de 0 ».

a. Exprimer le coefficient directeur de la sécante (AM) à la courbe en fonction de h puis simplifier au maximum l'expression obtenue.

b. Lorsque M se rapproche de A, que se passe-t-il géométriquement pour la droite (AM) ?

c. Lorsque M se rapproche de A, que se passe-t-il numériquement pour h ?

d. En déduire la valeur exacte du coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$.

> **Ce nombre est appelé nombre dérivé de la fonction f en 8 et est noté $f'(8)$.**
>
> **$f'(8)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 8.**
>
> On vient de voir que $f'(8)$ **est la limite quand** h **tend vers zéro de :** $\dfrac{f(8+h) - f(8)}{h}$

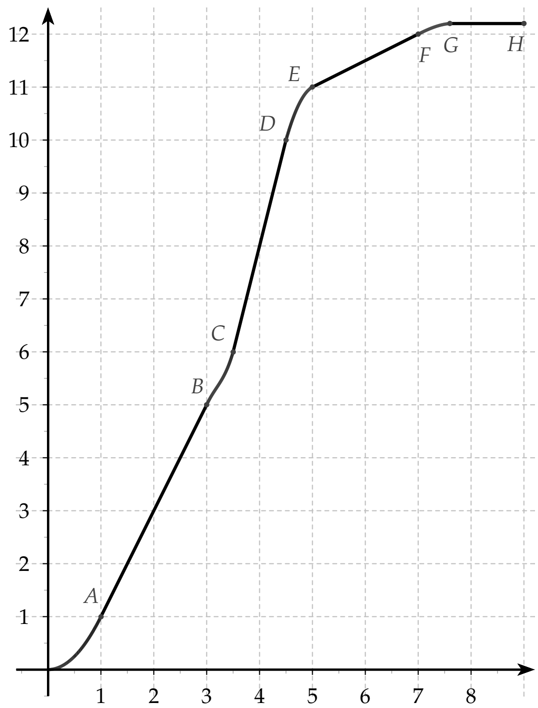
3. Dans le cas général, on considère un point A d'abscisse a.
En reprenant le principe d'étude de la question **2)**, déterminer une formule permettant d'obtenir $f'(a)$ le coefficient directeur de $\mathcal{T}_A$. Que représente-t-il pour la bille ?

4. Maurice dit : « La bille atteint sa vitesse moyenne à mi-parcours. ».
Mauricette dit : « La bille atteint sa vitesse moyenne à mi-temps de sa chute. ».
Pouvez vous les départager ?

Exercice nº 1

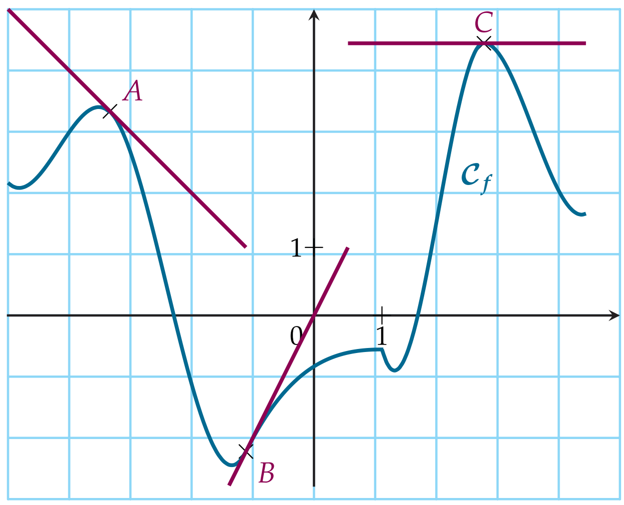
Le graphique suivant représente la distance (en mètres) parcourue par Bob avec son vélo en fonction du temps (en secondes).

1. Que peut-on dire de la vitesse de Bob lorsque $t \in [1;3]$?
2. Tracer sur le même graphique la courbe de la vitesse de Bob en fonction du temps.
   On prendra en ordonnée 1 carreau $\leftrightarrow$ 1m·s^{-1}.



Exercice nº 2

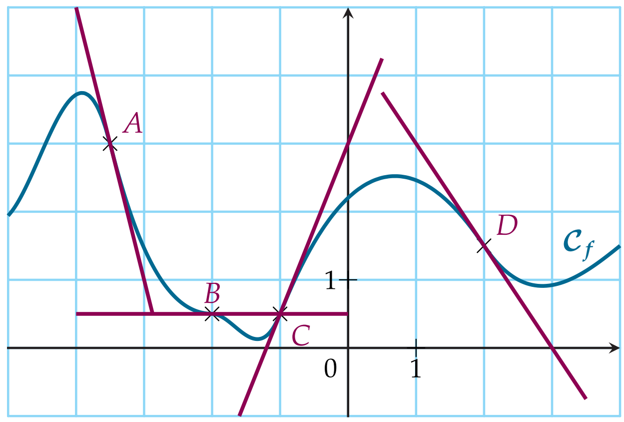
On considère la fonction f définie par la courbe ci-après et certaines des tangentes à la courbe.



Complétez le tableau avec $f(a)$ et $f'(a)$.

a	-3	-1	$2,5$	1
$f(a)$				
$f'(a)$				

Exercice nº 3 — Même exercice



x	$-3,5$	-2	-1	2
$f(x)$				
$f'(x)$				

Exercice nº 4 — Dans l'autre sens

On donne, pour certaines valeurs de x, la valeur de $f(x)$ et le nombre dérivé de f en x.

x	-2	0	3	5
$f(x)$	-2	-1	4	2
$f'(x)$	-1	1	0	-2

Donner une allure possible de la courbe.

Exercice nº 5

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le taux d'accroissement entre a et $a+h$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

où a est un réel donné, puis déterminer si f est dérivable en a. Lorsque c'est le cas, donner $f'(a)$.

1. $f(x) = -x^2$, $a = 2$
2. $f(x) = 2x - 7$,
   a réel quelconque.
3. $f(x) = mx + p$,
   m, p, a dans $\mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$
5. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$
6. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$

Exercice nº 6

On considère la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1. Graphiquement : Pourquoi f n'est-elle pas dérivable en 0 ? Que vaudraient $f'(0)$ « à gauche de 0 » et $f'(0)$ « à droite de 0 » ?
2. Algébriquement : Vérifier que : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(0) = \dfrac{|h|}{h}$.
   En distinguant les cas $h > 0$ et $h < 0$, retrouver les résultats de la question **1.**

Activité 2 ÉQUATION DE LA TANGENTE

1. Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(5;2)$ et de coefficient directeur 3. Développer $3(x-5)+2$
2. Vérifier que la droite qui a pour équation $y=2(x-1)-4$ passe par $(1;-4)$
3. Justifier que la droite qui passe par $A(x_A;y_A)$ et de coefficient directeur m a une équation de la forme : $y=m(x-x_A)+y_A$.
4. En déduire la forme de l'équation de la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe d'une fonction f au point A d'abscisse a en fonction des nombres : a, $f(a)$ et $f'(a)$.

$\mathcal{T}_A$: $y =$

Exercice n° 7 ALGO

Écrire un algorithme qui prend en entrée l'expression d'une fonction f et un nombre réel a et qui donne en sortie le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

Exercice n° 8

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de la tangente en a sous la forme $y=mx+p$.

1. $f: x \mapsto -x^2+x+1$, $a=-1$
2. $f: x \mapsto \sqrt{x}$, $a=4$
3. $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $a=-2$

Exercice n° 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=x^2+3x-1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

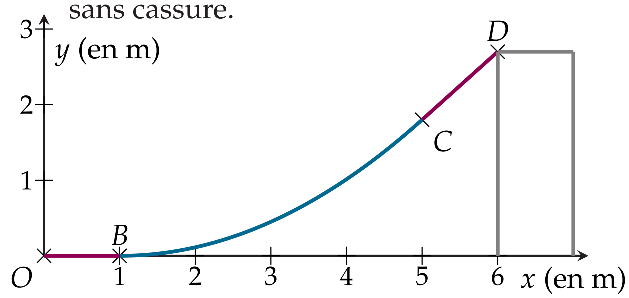
1. Montrer que pour tout réel a, $f'(a)=2a+3$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1.
3. Existe-t-il une tangente en un point de $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à la droite d'équation $y=-2x+\sqrt{17}$?
4. Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre cette tangente et $\mathcal{C}_f$.

Raccords lisses.

Exercice n° 10 **Rampe de skate**

Une rampe de skateboard est modélisée de la manière suivante :

- une partie horizontale sur l'intervalle $[0\,;\,1]$;
- un arc de parabole sur l'intervalle $[1\,;\,5]$ représentant la fonction $f: x \mapsto ax^2+bx+c$;
- un segment de droite sur l'intervalle $[5\,;\,6]$ avec $C(5\,;\,1{,}8)$ et $D(6\,;\,2{,}7)$;
- les raccordements aux points B et C se font sans cassure.



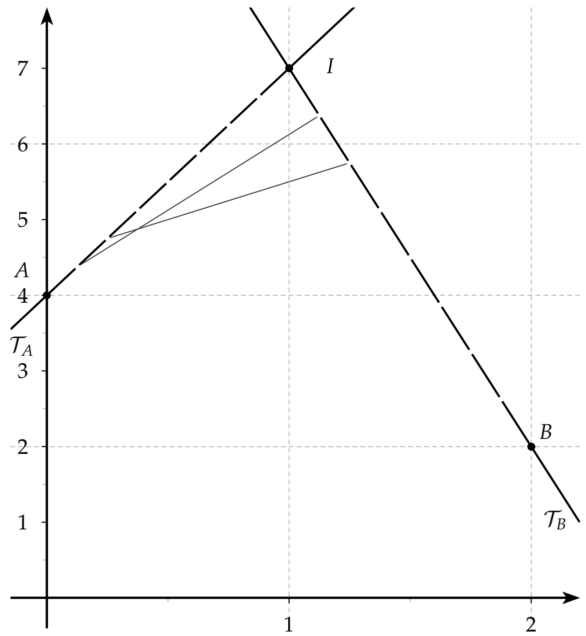
À l'aide des renseignements fournis, déterminer les valeurs de a, b et c.

Exercice n° 11 **Courbe de Bézier**

1. On considère la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \mapsto ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois réels à déterminer a, b et c de telle sorte que $\mathcal{C}_f$ admette aux points A et B d'abscisses respectives 0 et 2 les tangentes respectives $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$ d'équations :

$$\mathcal{T}_A : y=3x+4 \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_B : y=-5x+12$$

2. Continuez la construction suggérée ci-dessous en traçant des segments afin d'obtenir une approximation de la parabole qui passe par A et B avec pour tangentes $\mathcal{T}_A$ et $\mathcal{T}_B$.



Question ouverte : Étant donnés deux points et deux droites de coefficients directeurs donnés passant par chacun de ces deux points, discuter la possibilité de trouver une parabole admettant ces droites comme tangentes en ces points.

Démonstrations. *R♡C*

Exercice n° 12 — Fonctions de référence

Démontrez les formules de dérivations suivantes :

1. $f(x) = x^2$ a pour dérivée sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ [...] sur $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ [...] sur $\mathbb{R}^{+*}$: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice n° 13 — Opérations : somme & produits

Démontrez les formules de dérivations suivantes où u et v désignent des fonctions dérivables sur un même intervalle I.

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(ku)' = k \times u'$ où k est une constante réelle.

Calculs de dérivées.

Exercice n° 14 — Polynômes

Calculez l'expression de la fonction dérivée de f.

1. $f(x) = x^4$
2. $f(x) = 2x^3$
3. $f(x) = -3x + 1$
4. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 5x + 5$
5. $f(x) = 3x^7 - 6x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \sqrt{7}$
6. $f(x) = (3x+1)^2$
7. $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$.
8. $f(x) = 3x(2 - 4x^2)$

Exercice n° 15 — Sommes

Calculez l'expression de la fonction dérivée de f sans vous soucier du domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$
2. $f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$
3. $f(x) = -7x^2 + \frac{3}{x}$
4. $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{5x^4 - 6x^2 + 3}{x}$
7. $f(x) = -3x(x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}})$

Exercice n° 16 — Primitives

Déterminer une expression possible pour $f(x)$:

1. $f'(x) = 2x - 6x^2$
2. $f'(x) = x + 1$
3. $f'(x) = -3 + 2x^2$
4. $f''(t) = g$. ($g \in \mathbb{R}$)

Résumé de cours

Définition 1. Pour une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $(a+h) \in I$.
On appelle *taux d'accroissement* de f entre a et $a+h$ le quotient :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition 2. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est *dérivable en a* (où $a \in I$) si le taux d'accroissement entre a et $a+h$ admet une limite quand h tend vers zéro.
Lorsque cette limite existe on l'appelle *nombre dérivé de f en a*, que l'on note $f'(a)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Propriété 1. *Lorsque f est dérivable en a, le nombre $f'(a)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.*

Propriété 2 (Équation de la tangente.). *Lorsque f est dérivable en a, l'équation de $\mathcal{T}_a$, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a admet pour équation :*

$$\mathcal{T}_a : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Propriété 3. *Si u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I et k un nombre réel, alors les fonctions $u+v$ et ku sont aussi dérivables sur I et on a : $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = k \times u'$.*

Propriété 4. *Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a les formules suivantes :*

$f(x)$	constante	x	x^2	x^3	x^4	x^n
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	nx^{n-1}

Exemple : Si $f(x) = -x^6 + 4x^3 + 5x^2 - 3x + 7$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée a pour expression : $f'(x) = -6x^5 + 12x^2 + 10x - 3$.

Propriété 5. *La fonction inverse est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ où elle est définie et l'expression de sa fonction dérivée est :* $\boxed{\dfrac{-1}{x^2}}$

Propriété 6. *La fonction racine est dérivable sur $]0; +\infty[$ (mais pas en zéro !) et l'expression de sa fonction dérivée est :* $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$