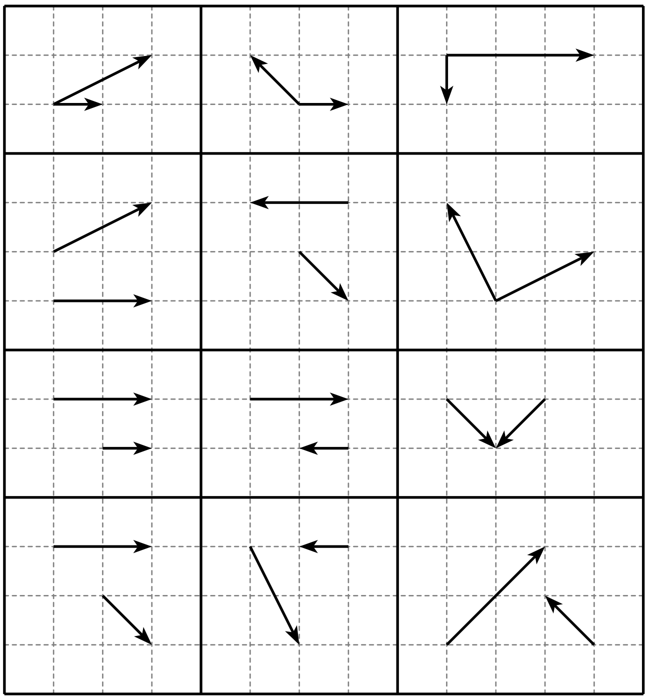
Projections

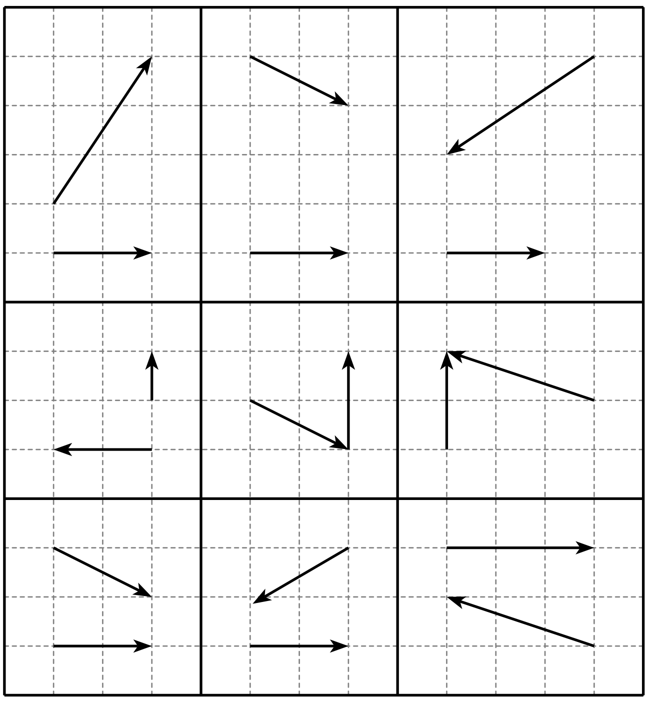
Exercice n° 1

Déterminer par projection de l'un sur l'autre le produit scalaire des deux vecteurs dans chaque case. L'unité est le carreau.



Exercice n° 2

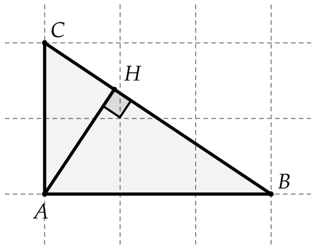
Déterminer par projection de l'un sur l'autre le produit scalaire des deux vecteurs dans chaque case. L'unité est le carreau.



Exercice n° 3

ABC est rectangle en A. L'unité est le carreau.

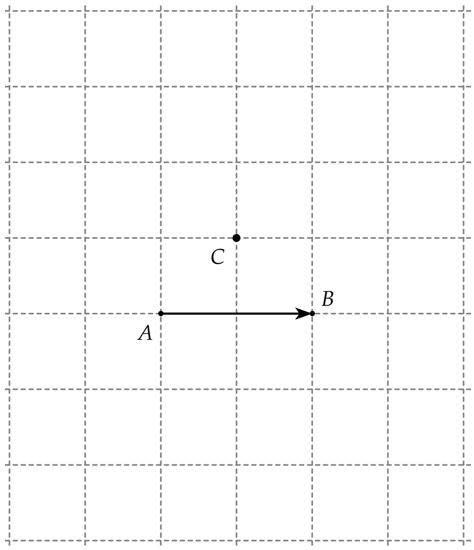
1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} =$
2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} =$
3. $BC =$
4. En déduire BH.



Exercice n° 4

Tracer sur la figure l'ensemble $\mathcal{L}_2$ des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 2$.

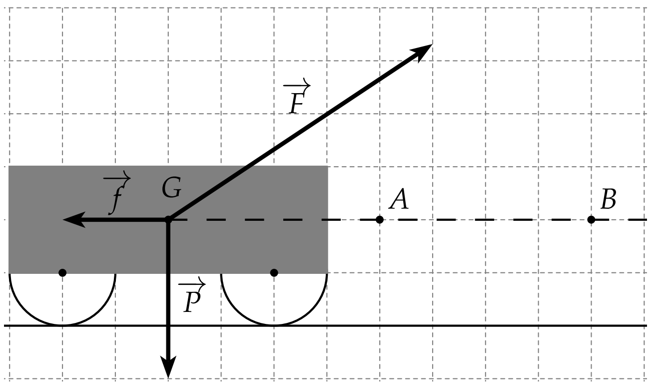
Tracez de même $\mathcal{L}_k$ ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = k$ pour les valeurs $k = 4$ puis $k = 0$, et $k = -6$.



Exercice n° 5 **Travail d'une force**

En Sciences Physiques on définit le travail $W_{A \to B}(\overrightarrow{F})$ (énergie en Joules) d'une force $\overrightarrow{F}$ sur un déplacement de A à B comme le produit scalaire :

$$W_{A \to B}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$



On a représenté un wagonnet qui roule sur des rails, entraîné par une force de traction $\overrightarrow{F}$, soumis à son poids $\overrightarrow{P}$ et subissant une force de frottements $\overrightarrow{f}$. Calculez le travail de chacune de ces forces lorsque le centre de gravité du wagonnet se déplacera de A à B. On prendra un carreau comme unité (pour les mètres et les Newton).

1. $W_{A\to B}(\overrightarrow{F}) =$
2. $W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) =$
3. $W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) =$

Formule avec cosinus

Exercice nº 6
ABC est un triangle équilatéral de côté 6. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Exercice nº 7
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. Justifier que $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\vec{v}\cdot\vec{u}$ sont égaux.
2. Justifier que $(2\vec{u})\cdot\vec{v} = 2\times(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Exercice nº 8
Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $\widehat{ABC} = 60°$ et $\widehat{BAC} = 30°$. Calculez les côtés de ABC puis :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$
3. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

Exercice nº 9 — Al–Kashi
Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60°$. Calculez BC

Exercice nº 10
$ABCD$ est un carré de côté 4 et de centre O, calculez les produits scalaires par la méthode de votre choix :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}$
4. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$
6. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$
7. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}$
8. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$
9. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AD}$

Exercice nº 11
On considère un triangle ABC où $AB = 5$ et $BC = 6$ et $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
   On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Formule avec longueurs uniquement

Exercice nº 12
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. En développant $(\vec{u}-\vec{v})^2$ retrouver la formule : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)$.
2. Déterminer une formule analogue faisant intervenir $||\vec{u}+\vec{v}||^2$
3. Tracez un parallélogramme $ABDC$ où on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Traduire les deux relations précédentes pour $\vec{u}\cdot\vec{v}$ avec les longueurs de la figure.

Exercice nº 13
On considère un triangle ABC où $AB = 3$, $AC = 2$ et $BC = \sqrt{7}$

1. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire $\widehat{BAC}$

Exercice nº 14
On considère un parallélogramme $ABCD$ où $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{15}$ et $AD = \sqrt{6}$

1. Calculez $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.
2. En déduire $\widehat{BAD}$

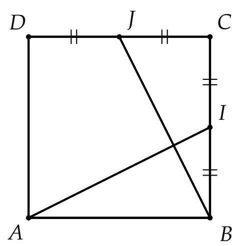
Exercice nº 15
On considère un triangle ABC avec :
$AB = 2$, $AC = 3$ et $BC = 4$. Déterminer une valeur approchée des angles de ce triangle.

Exercice nº 16
Soit ABC un triangle quelconque établir une formule permettant de calculer $\widehat{BAC}$ en fonction des côtés du triangle.

Orthogonalité. (Chasles)

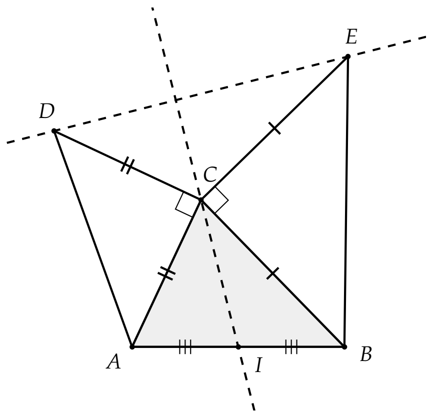
Exercice nº 17
$ABCD$ est un carré. On note I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

En développant $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ})$, prouver que : $(AI)\perp(BJ)$.



Exercice n° 18

On considère un triangle quelconque ABC, I le milieu de $[AB]$ et les points D et E tels que les triangles directs ACD et CBE soient isocèles et rectangles en C.



1. Quelle conjecture faire sur (CI) et (ED) ?
2. Justifier que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
3. En déduire que :

$$\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}\right).$$

4. Conclure.

Formule analytique : $xx' + yy'$

Dans ces exercices on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Exercice n° 19 — **Démonstrations**

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

① En développant : $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$ établir la formule analytique du produit scalaire :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

② Établir cette même formule en partant de

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}\,||^2 + ||\vec{v}\,||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}\,||^2\right)$$

Rappel : On sait que $||\vec{u}\,|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercice n° 20

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ où $\vec{u}\begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
2. $\vec{s} \cdot \vec{t}$ où $\vec{s}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
3. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ où $\vec{a}\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. $\vec{c} \cdot \overrightarrow{UV}$ où $\vec{c}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix}$, $U(\sqrt{24} + 5; 1)$, $V(5; \sqrt{2})$
5. $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AB}$ où $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A(-1; 2)$ et $B(-3; 6)$
6. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MR}$ où $C(5; 6)$, $D(-1; 4)$, $M(3; 7)$ et $R(8; 9)$
7. $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{EF}$ où $E(0; 1)$, $F(3; 0)$, $S(8; 8)$ et $T(5; 5)$

Exercice n° 21

On considère les points $A(1\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(-2\ ;\ -2)$, $D(13\ ;\ -5)$ et $E(4\ ;\ 3)$.

1. Les droites (AC) et (AB) sont-elles perpendiculaires ?
2. Même question pour :
   a. (AC) et (BD)
   b. (BE) et (CD)

Exercice n° 22

On considère trois points $A(\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3})$, $C(-\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{7} + 2\sqrt{3})$.

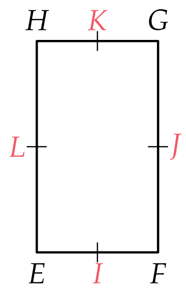
Montrer que ABC est rectangle en B.

Exercice n° 23

Reprendre l'exercice n° **17** en utilisant un repère orthonormé adapté et en utilisant la formule analytique du produit scalaire.

Exercice n° 24

On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF = 4$ et $EH = 7$, et les points I, J, K et L, milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$.



1. Reproduire la figure.
2. En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

a. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}$	c. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}$	e. $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IG}$
b. $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{EG}$	d. $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EK}$	f. $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{JK}$

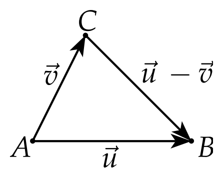
I Diverses expressions.

Dans cette page, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs quelconques. Le poduit scalaire de deux vecteurs peut être défini de diverses manières et on a les formules suivantes qui sont équivalentes. On choisit la plus adaptée selon le contexte de l'exercice.

Avec des normes uniquement :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2\right)}$$

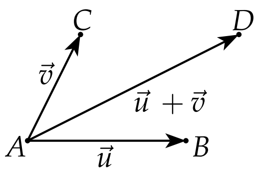
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$



On retrouve rapidement cette formule en développant $(\vec{u}-\vec{v})^2$. On a aussi une formule équivalente en développant $(\vec{u}+\vec{v})^2$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AD^2 - AB^2 - AC^2\right)$$



Avec des normes et un angle :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$$

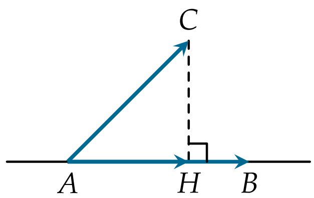
Par projection orthogonale :

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}.}$$

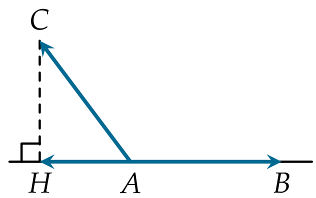
Pour $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :



$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :



$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH}$$

Formule analytique (dans un repère orthonormé) :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'}$

II Propriétés

① Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ (Symétrie des les formules, sauf par projection).

② Carré scalaire : On note $\vec{u}^{\,2}$ le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ (c'est un réel positif) : $\vec{u}^{\,2} = \vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

③ Les opérations avec le produit scalaire se passent bien. Par exemple : ce produit est distributif sur l'addition de vecteurs : $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{w}+\vec{z}) = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{z} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{z}$. On a donc aussi les identités habituelles pour $(\vec{u}+\vec{v})^2$. Il est associatif avec la multiplication par un réel k : $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$ de sorte que ces parenthèses sont inutiles. Le vecteur nul est absorbant : $\vec{0}\cdot\vec{u} = 0$ quel que soit $\vec{u}$, etc.

④ Orthogonalité. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux (ce qu'on note $\vec{v} \perp \vec{v}$) si, et seulement si, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur.

Dire que deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires revient à dire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

⑤ Al-Kashi. (aka "The cosine rule") En comparant les deux premières écritures du produit scalaire on a dans un triangle ABC une formule permettant de déterminer un troisième côté si on connait l'angle entre deux côtés connus. On retrouve le théorème de Pythagore quand l'angle est droit :

$$\boxed{CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$$