Exercice n° 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et la relation valable pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4.

2. Quelle conjecture peut on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ? On veut prouver cette conjecture, voici un nouveau type de raisonnement :

3. Prouver que si pour un certain k ($k \in \mathbb{N}^*$) on a bien $u_k = k^2$, alors $u_{k+1} = (k+1)^2$. On dit que la propriété est « héréditaire ».

4. Conclure et calculer : $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2007$

Principe du raisonnement par récurrence

On vient d'utiliser un raisonnement par récurrence (on dit aussi par induction[1]). C'est un principe de raisonnement (comme le raisonnement par l'absurde) qui sert à établir une propriété valable pour une infinité d'entiers naturels. Ce raisonnement comporte quatre étapes : L'initialisation, l'hypothèse de récurrence, l'hérédité et la conclusion.
Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n dont on veut prouver qu'elle est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$. (Parfois pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ ou plus généralement pour n entier à partir d'un certain rang initial n_0, *i.e.* $n \geqslant n_0$)

Initialisation. On vérifie que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. (ou $\mathscr{P}(n_0)$)
Hypothèse de récurrence. On suppose que pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
Hérédité. On montre que sous l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{P}(k+1)$ est aussi vraie.
Conclusion. Alors par récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou tout $n \geqslant n_0$).

⚠ L'initialisation est nécessaire :

Exemple: Prouver que la « propriété » $\mathscr{P}(n)$: « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire. Est–elle vraie pour autant ?

Exercice n° 2

Prouver par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'entier $8^n - 1$ est divisible par 7.

Exercice n° 3

Prouver par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Exercice n° 4

1. Justifier que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n^2+n} \geqslant n$

2. En déduire la preuve par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}$$

3. En déduire la limite de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice n° 5

The triangle inequality says that for any two real numbers x and y, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. Show (by mathematical induction) that for any n real numbers x_1, x_2, $\ldots$, x_n, we have :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

[1] *Proof by induction* or *principle of mathematical induction* in english