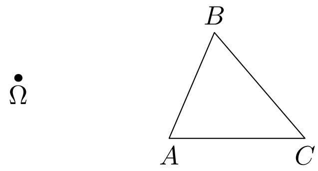
I Homothétie

On se place dans un plan, Ω est un point de ce plan et k désigne un réel.

Définition 1. On appelle homothétie de centre Ω et de rapport k la transformation $\mathscr{H}$ du plan qui à tout point M du plan associe le point $M' = \mathscr{H}(M)$ tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

Compléter la figure ci-dessous en traçant l'image du triangle ABC par les homothéties $\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_{\frac{1}{2}}$, $\mathscr{H}_{-1}$, $\mathscr{H}_{-\frac{1}{2}}$ de centre Ω et de rapports respectifs : 2, $\frac{1}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$.



Une homothétie n'est *a priori* pas une isométrie, l'image d'un segment n'est pas nécéssairement un segment de même longueur :

Propriété 1. *Soit une homothétie $\mathscr{H}$ de rapport k. On note A et B deux points du plan d'images : $A' = \mathscr{H}(A)$ et $B' = \mathscr{H}(B)$. Alors :*

$$A'B' = |k| \times AB$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

Propriété 2. *Soit $\mathscr{H}$ une homothétie de centre Ω et de rapport k.*

① *Si $k = 0$, tout point a pour image Ω par $\mathscr{H}$*

② *Si $k = 1$ alors $\mathscr{H}$ est l'identité Id,* i.e. *tout point est invariant par $\mathscr{H}$.*

③ *Si $k = -1$ alors $\mathscr{H}$ est la symétrie de centre Ω.*

④ *Si $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ alors le seul point invariant par $\mathscr{H}$ est son centre Ω.*

⑤ *$\mathscr{H}$ est une isométrie ssi k vaut 1 ou -1.*

Démonstration. Simple, laissée en exercice. □

Composée de deux homothéties de même centre Quelle transformation opère-t-on lorsqu'on applique une homothétie de centre Ω et de rapport 2 puis une homothétie de centre Ω et de rapport 3 ? . . . .

Et si on applique une homothétie de centre Ω et de rapport 2 puis une homothétie de centre Ω et de rapport $1/2$? . . . .

Plus généralement :

Propriété 3. *La composée de deux homothéties $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ de même centre Ω est une homothétie, de centre Ω et dont le rapport est le produit des rapports de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$.*

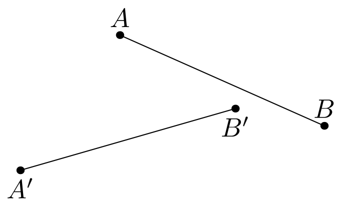
Propriété 4. *Si $k \neq 0$, la transformation* réciproque *de l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre Ω et de rapport k est l'homothétie $\mathscr{H}^{-1}$ de centre Ω et de rapport $1/k$. On a la relation :*

$$\mathscr{H} \circ \mathscr{H}^{-1} = \mathscr{H}^{-1} \circ \mathscr{H} = Id$$

II Similitude directe

II.1 Rotation

L'image d'un segment par une isométrie est un segment de même longueur. On peut prouver que quelque soient deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ non paralèlles, de même longueur, il existe une rotation qui transforme A et A' et B en B'. Construire le centre d'une telle rotation sur la figure ci-dessous.

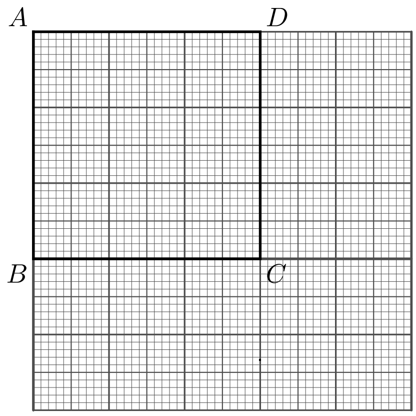


II.2 Composée de deux transformations

On considère une transformation $\mathscr{S} = \mathscr{H} \circ \mathscr{R}$ où $\mathscr{H}$ est une homothétie de rapport k, de centre Ω et $\mathscr{R}$ une rotation de même centre Ω et d'angle θ.
C'est à dire que pour un point M, son image par $\mathscr{S}$ est :

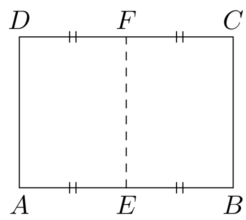
$$M' = \mathscr{S}(M) = (\mathscr{H} \circ \mathscr{R})(M) = \mathscr{H}(\mathscr{R}(M))$$

Une telle transformation s'appelle la similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.
Construire ci-contre l'image du carré $ABCD$ par la similitude $\mathscr{S}$ de centre C, de rapport $2/3$ et d'angle $-90°$. Continuer en traçant les images successives des carrés obtenus par cette même similitude. Quelle est la mesure en cm du 5e carré que vous avez tracé ? ....
Combien de fois faut-il appliquer $\mathscr{S}$ pour obtenir un carré de côté inférieur à 1 mm ? ....



II.3 T.P. Format de feuille.

Les feuilles de format A_0, A_1, A_2, A_3, A_4,... ont la propriété suivante : Lorsqu'on plie une feuille de format A_n en deux comme ci-contre selon les pointillés, on obtient une feuille de format A_{n+1} qui a les mêmes proportions (*i.e.* le même rapport longueur/largeur) que la feuille de format A_n. Avec les notations de la figure, on a donc :



$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE}$$

1. Déterminer la valeur exacte du rapport longueur/largeur d'une feuille de format A_4.

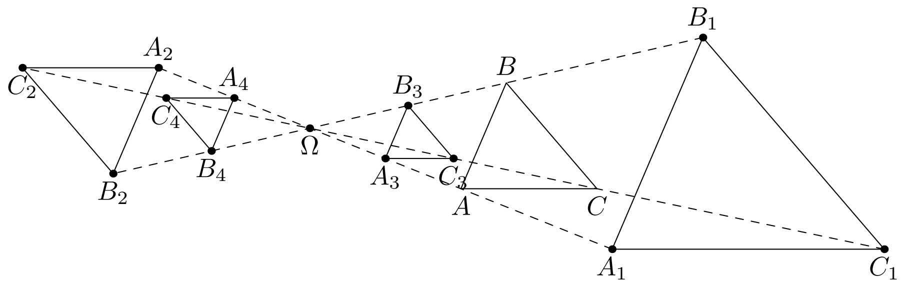
- **a.** Les dimensions affichées d'une feuille A_4 sont en mm : 210×297. Est-ce cohérent avec les calculs faits ?
- **b.** Une feuille de format A_0 a une aire de 1 m^2. Déterminer la valeur exacte de ses côtés, puis celle d'une feuille A_4. En donner des valeurs approchées à 0,01 mm près, comparer.

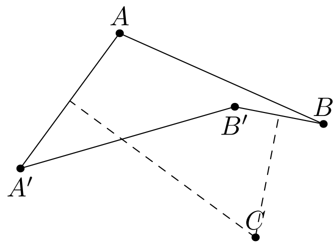
2. On admet qu'il existe une similitude $\mathscr{S}$ transformant $ABCD$ en $EFCB$ ainsi :

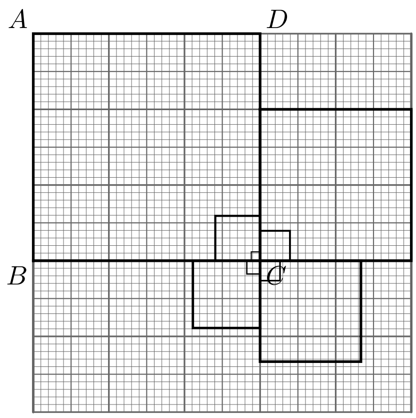
$$\mathscr{S}(A) = F, \quad \mathscr{S}(B) = E, \quad \mathscr{S}(C) = B, \quad \mathscr{S}(D) = C$$

- **a.** Quels doivent être l'angle et le rapport de cette similitude ?
- **b.** Plus dur, on cherche son centre Ω.
  - i. Combien mesurent les angles $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega C})$ et $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B})$? En déduire que $\Omega \in [BD]$.
  - ii. En considérant $\mathscr{S}(C)$ et $\mathscr{S} \circ \mathscr{S}(C)$ construire Ω.

3. Sur une feuille A_4, tracer les rectangles successifs de format A_n (`for n from 5 to 12`) que l'on obtient en appliquant cette similitude $\mathscr{S}$.


B_1
A_2
A_4
B
B_3
C_2
C_4
Ω
B_4
A_3
C_3
B_2
A
C
A_1
C_1


A
B
B'
A'
C


A
D
B
C